Microeconomia - Problem set 1 - soluzione

(Prof. Paolo Giordani - TA: Pierluigi Murro)

26 Marzo 2015

Esercizio 1.

Si consideri la seguente funzione di utilità Cobb-Douglas (*nota*: i pesi non sommano ad 1)

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Il reddito a disposizione del consumatore è $m = 200$; i prezzi dei due beni sono rispettivamente $p_1 = 10$ e $p_2 = 50$.
Si determini il piano di consumo ottimo.

Risposta:

La scelta ottima del consumatore può essere calcolata in due modi.

1. Il primo consiste nel risolvere il seguente sistema di equazioni (le preferenze Cobb-Douglas sono infatti preferenze "regolari", ovvero monotone e convesse)

   $$\begin{cases} SMS = p_1/p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

   Nel nostro caso, data la funzione di utilità specificata, il SMS è pari a x_2/x_1, e dunque il sistema diventa

   $$\begin{cases} x_2/x_1 = 10/50 \\ 10x_1 + 50x_2 = 200 \end{cases}$$

   Il sistema può essere risolto per sostituzione: prima di tutto troviamo x_1 nella prima equazione ottenendo $x_1 = 5x_2$; ora sostituiamo questa espressione nella seconda equazione, ottenendo $10 \times 5x_2 + 50x_2 = 200$. Risolvendo l'equazione nell'incognita x_2 si ottiene $x_2^* = 2$, e quindi $x_1^* = 5x_2^* = 10$.

2. Il secondo metodo si applica soltanto alle preferenze Cobb-Douglas. In generale, quando i pesi della funzione di utltà c,d non sommano ad uno la soluzione può essere calcolata applicando la seguente formula:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} \\ x_2 = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2} \end{cases}$$

In questo caso c,d=1, per cui la soluzione sarà data da:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\frac{200}{10} \\ x_2 = \frac{1}{2}\frac{200}{50} \end{cases}$$

$x_1^* = 10$ e $x_2^* = 2$

Calcolare come cambia la scelta del consumatore nei seguenti casi:

1. $\Delta p_1 = 10$, $\Delta p_2 = 0$, $\Delta m = 0$
2. $\Delta p_1 = 0$, $\Delta p_2 = -30$, $\Delta m = 0$
3. $\Delta p_1 = 0$, $\Delta p_2 = 0$, $\Delta m = 100$

   Risposta: I tre casi possono essere risolti in maniera analoga.
4. $x_1^* = 5$ e $x_2^* = 2$
5. $x_1^* = 10$ e $x_2^* = 5$
6. $x_1^* = 15$ e $x_2^* = 3$

Esercizio 2

Rispondere vero o falso.

1. Se il consumatore ha preferenze concave, il punto di consumo ottimo è rappresentatao dalla tangenza tra la curva di indifferenza ed il vincolo di bilancio.
   Risposta: Falso. La scelta del consumatore è rappresenta da un ottimo di frontiera; l'individuo preferisce consumare un paniere estremo anziché un paniere medio.

2. Si considerino due beni. Sia x_1 un bene normale, mentre x_2 è considerato un "male" . Il piano di consumo ottimo è dato da una grande quantità del bene 1 ed una piccola quantità del bene 2.
   Risposta: Falso. Dal momento che il bene 2 arreca disutilità, il consumatore non lo compra affatto. La scelta ottima è rappresentata infatti da un punto di frontiera.

3. Si considerino due beni. Sia x_1 un bene normale, mentre x_2 è considerato un bene "neutrale". Il piano di consumo ottimo è un punto di frontiera.
   Risposta: Vero. Dal momento che il bene 2 non dà alcuna utlità, il consumatore spenderà tutto il suo reddito disponibile per l'acquisto del bene x_1.

Esercizio 3.

Si consideri la seguente funzione di utilità per beni perfetti sostituti 1 ad 2 (*nota*: $a = 2$)

$$u\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + x_2$$

La funzione di utilità può essere scritta anche come $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2/2$. Sia il reddito pari a $m = 36$. Si determinino le quantità ottime nei seguenti casi.

1. $p_1 = 2$, $p_2 = 1$
2. $p_1 = 1$, $p_2 = 1$
3. $p_1 = 3$, $p_2 = 1$

Risposta

Prima di tutto è necessario calcolare il SMS. In questo caso è uguale ad 2. La scelta ottima del bene x_1 è:

$$x_1 = \begin{cases} m/p_1 & \text{if } p_1/p_2 < 2 \\ [0, m/p_1] & \text{if } p_1/p_2 = 2 \\ 0 & \text{if } p_1/p_2 > 2 \end{cases}$$

La soluzione ottima per il bene x_2 può essere calcolata in maniera analoga.

Consideriamo i singoli casi:

1. $p_1 = 2, p_2 = 1 \Longrightarrow p_1/p_2 = 2$
   La scelta ottima del bene x_1^* sarà quindi compresa tra [0,18]. Analogamente, la scelta ottima del bene x_2^* sarà compresa tra [0,36].

2. $p_1 = 1, p_2 = 1 \Longrightarrow p_1/p_2 < 2$
   Il consumatore consuma soltanto il bene x_1; la scelta ottima sarà quindi $x_1^* = 36$ e $x_2^* = 0$.

3. $p_1 = 3, p_2 = 1 \Longrightarrow p_1/p_2 > 2$
   Il consumatore consuma soltanto il bene x_2; la scelta ottima sarà quindi $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 36$.

Esercizio 4.

Si consideri la seguente funzione di utilità con beni perfetti complementi 1 ad 2 (*nota*: $a = 2$)

$$u(x_1, x_2) = min\left\{x_1, \frac{x_2}{2}\right\}$$

La funzione di utilità può essere scritta anche come $u(x_1, x_2) = min\{2x_1, x_2\}$. Il reddito è $m = 50$ e i prezzi dei due beni sono rispettivamente $p_1 = 2$, $p_2 = 4$. Determinare le quantità ottime dei due beni.

Risposta

Per calcolare la scelta ottima del consumatore è necessario risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = x_2/2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

Risolvere il sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x_1 = x_2/2 \\ 2 * (x_2/2) + 4x_2 = 50 \end{cases}$$

La soluzione ottima è quindi $x_1^* = 5$ e $x_2^* = 10$.

Esercizio 5.

Si consideri la seguente funzione di utilità (preferenze quasi-lineari)

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$$

Il reddito è $m > 0$ e i prezzi dei due beni sono rispettivamente $p_1 = 1$, $p_2 = 4$. Determinare le quantità ottime dei due beni (*nota*: la quantità ottima del bene 2 in funzione di m).

Risposta

La scelta del consumatore è identificata dalle due condizioni:

$$\begin{cases} SMS = p_1/p_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

Nel nostro caso il sistema diventa:

$$\begin{cases} 1/(2\sqrt{x_1}) = 1/4 \\ x_1 + 4x_2 = m \end{cases}$$

Risolvere il sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 4 + 4x_2 = m \end{cases}$$

La soluzione ottima è quindi $x_1^* = 4$, $x_2^* = (m - 4)/4$.