Esercitazioni sulla prima parte delle lezioni di Micro

Richiamo di Analisi Matematica

La forma funzionale più semplice è la retta, la quale può essere genericamente descritta dalla seguente relazione:

$$y = a + bx$$

dove a e b sono due parametri mentre x e y sono le variabili della funzione.

A valori diversi dei parametri corrispondono rette diverse. In particolare:

- *a* rappresenta l'intercetta o termine noto della retta, ossia il valore della y quando x = 0.

  Quando $a = 0$ la retta passa per l'origine degli assi (il punto di coordinate (0,0)).

- b misura la pendenza o inclinazione della retta:

  - se $b > 0$ la retta è crescente e l'inclinazione è positiva;
  - se $b < 0$ la retta è decrescente e l'inclinazione è negativa;
  - se $b = 0$ la retta è parallela all'asse delle x (altezza della y=*a*)

  Tanto maggiore è il valore assoluto di *b*, tanto più inclinata è la retta. Una linea retta ha pendenza costante in ogni suo punto (i.e. la sua derivata prima è costante).

Consideriamo la retta y = 3x, in cui la x rappresenta la variabile indipendente (ad esempio, il reddito)

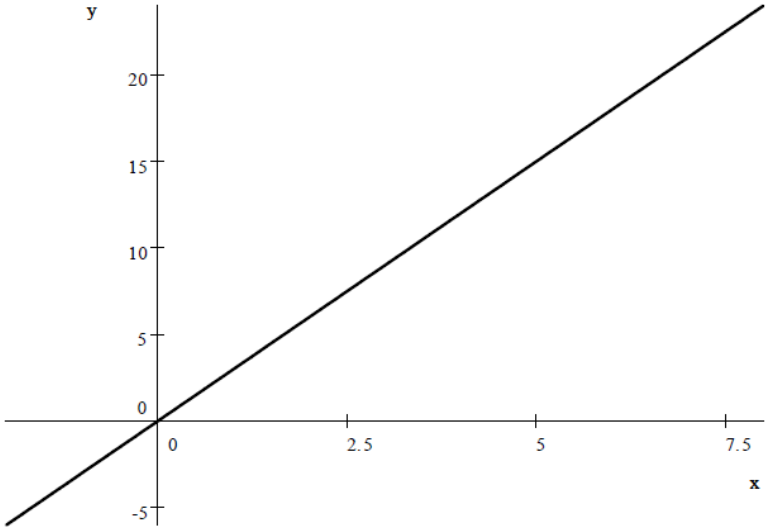
mentre y è la variabile dipendente (ad esempio, il consumo).

Per rappresentare velocemente una retta è possibile assegnare differenti valori numerici alla x e trovare i corrispondenti valori della y.

La seguente tabella, ad esempio, riporta alcuni punti della retta y = 3x. Il successivo grafico la disegna per tutti i punti.

Retta y = 3x

x	$y = 3x$
1	3
2	6
3	9
4	12



Si può notare come la retta in questione passi per l'origine, ossia per il punto di coordinate (0; 0). Notate, infatti, che in y=3x abbiamo che *a*=0

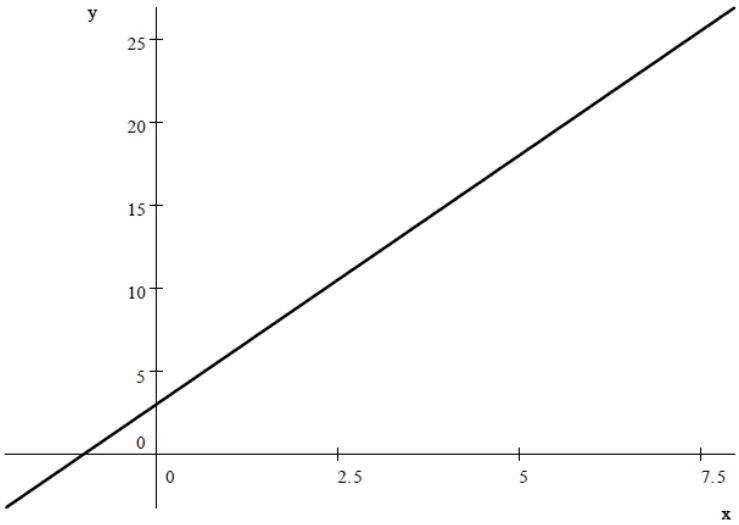
Analogamente, nel caso in cui la retta non passi per l'origine (a≠0), si può adottare il metodo precedente oppure si possono individuare le intercette, cioè i punti di incontro tra la retta e gli assi cartesiani.

In generale, si definisce:

- intercetta verticale quel punto in cui una curva (qui una retta) incontra l'asse delle ordinate e indica il valore della variabile y quando la x = 0;
- intercetta orizzontale quel punto in cui una curva incontra l'asse delle ascisse e indica il valore della variabile x quando la y = 0.

La prossima figura rappresenta la retta y = 3x + 3:

y = 3x + 3



Confrontando le due funzioni, è possibile notare che esse presentano la medesima inclinazione (infatti b = 3 in entrambi i casi): ciò significa che, per qualsiasi variazione di x, y varierà della stessa quantità.

Tuttavia, la funzione y = 3x + 3 risulta traslata verticalmente. Per quantificare la distanza tra le due rette (che ovviamente risultano parallele), calcoliamo le rispettive intercette (verticali):

quando x = 0,

la funzione y = 3x assume il valore di 0 (l'origine degli assi),

mentre la funzione y = 3x + 3 assume il valore di 3.

Funzione di domanda inversa

Consideriamo un altro esempio in cui la funzione lineare esaminata rappresenta una funzione di domanda la quale, al solito, mette in relazione la quantità domandata di un bene e il suo prezzo:

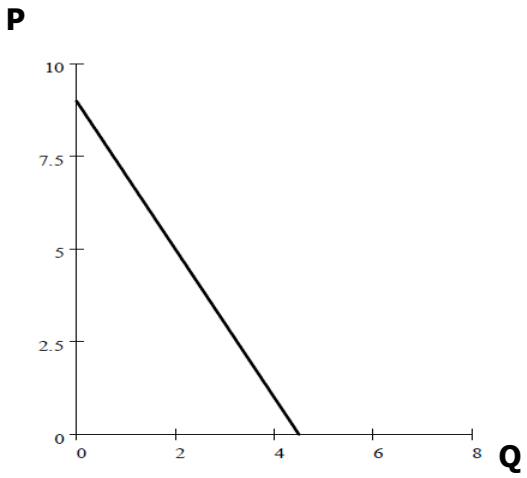
$$P = 9 - 2Q$$

Notiamo che è una funzione di domanda inversa: ci dice come varia il prezzo al variare della quantità e non, come al solito, come varia la quantità al variare del prezzo.

Per rappresentare tale funzione sul piano, è sufficiente trovare le due intercette e invertire gli assi:

$$Q = 0 \Rightarrow P = 9$$

$$P = 0 \Rightarrow Q = 9/2 = 4{,}5$$



FORMULE DI DERIVATE CHE CI SERVIRANNO

y=f(x)	Derivata prima		Esempi	
$y = c$	$\frac{dy}{dx} = 0$	c = costante	$y = 5$	$\frac{dy}{dx} = 0$

Funzione potenza

$y = x^{\beta}$	$\frac{dy}{dx} = \beta x^{\beta - 1}$	β = costante	$y = x^3$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

<u>Casi particolari di funzione potenza</u>

$y = x$	$\frac{dy}{dx} = 1$			
$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	n = costante	$y = \sqrt[3]{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$			
$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$			

Le seguenti due notizie sono vere: le ho prese dai giornali. Rispondete alle domande con l'ausilio dei meccanismi di mercato imparati: RISPOSTE, VOLENDO ANCHE CON GRAFICI, MA BEN MOTIVATE E SINTETICHE!

ESERCIZIO 1. Il Mercato del Ferro

Il maggior produttore al mondo di minerale di ferro (una società brasiliana), ha registrato una produzione annua di 319,2 milioni di tonnellate nel 2014, una cifra superiore del 6,5% a quella del 2013.

1) Che cosa potrebbe essere successo ai prezzi?

ESERCIZIO 2. Il Mercato Petrolifero

Nel 2011 l'attività economica ha subito una battuta d'arresto che ha frenato anche la domanda totale di petrolio.

Nel complesso, **la domanda** si è attestata a 89,1 milioni barili/giorno, con un progresso di neanche 800 mila barili/giorno, meno di un terzo rispetto al 2010.

La Cina si conferma come il primo consumatore mondiale con il 9,5 milioni b/g. Si avvia dunque a diventare il primo importatore di petrolio entro il 2020.

L'offerta di petrolio, nel corso del 2011, complessivamente è stata pari a 88,4 milioni barili/giorno, con un aumento di 1,1 milioni barili/giorno (+1,3 per cento) rispetto al 2010 e di circa 3 milioni al 2009.

1) Nel 2011 i prezzi del petrolio sono variati? Se sì, perché?
2) Investendo molto in nuove tecnologie, gli USA possono ora estrarlo in modo vantaggioso a 60$/barile: cosa potrebbe succedere al P e alla Q di equilibrio in questo scenario?
3) I dati ci dicono che le scorte cinesi di petrolio sono aumentate più del previsto: quali effetti sui prezzi?

ESERCIZIO 3.

Consideriamo il mercato del bene K. La quantità domandata e la quantità offerta del bene possono essere descritte dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} Q_d &= 20 - 3P \\ Q_s &= -4 + P \end{aligned}$$

(a) Si determini il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato del bene K.

(b) Si calcoli il nuovo equilibrio di mercato dopo che una diminuzione del costo dei fattori produttivi ha trasformato la funzione di offerta in $Q_s = -4,8 + 1,2P$ e che una diminuzione del reddito ha colpito la domanda causandone un calo del 40%.

(c) Si rappresentino graficamente le curve di domanda e di offerta prima e dopo gli shock descritti nel punto (b) e i relativi punti di equilibrio.

(c1) Perché il termine noto di Q_s è negativo mentre quello di Q_d è positivo? Calcolate entrambi.

(d) Per quali intervalli di prezzo la domanda e l'offerta hanno senso economico?

(e) Calcolate le elasticità dell'offerta e della domanda al prezzo prima e dopo gli shock di cui al punto (b).

SOLUZIONE:

(a) L'equilibrio di mercato del bene K è dato dal prezzo in corrispondenza del quale la quantità domandata è uguale a quella offerta. Per determinare l'equilibrio di mercato è necessario mettere a sistema la funzione di domanda e di offerta in modo da ottenere un sistema di due equazioni in due incognite. Risolvere il sistema significa cercare quella coppia di quantità e prezzo che contemporaneamente soddisfano le due equazioni (graficamente significa identificare quel punto che è comune alla domanda e all'offerta, ossia il punto di intersezione delle due curve).

$$\begin{cases} Q_d = 20 - 3P \\ Q_s = -4 + P \end{cases}$$

Dato che in equilibrio $Q_d = Q_s$,

$$20 - 3P = -4 + P$$

si ottiene $P^* = 6$ e, sostituendo P^* in una delle due equazioni, $Q^* = Q_s = Q_d = 2$.

(b) Per determinare il nuovo equilibrio, in seguito a uno spostamento congiunto della domanda e dell'offerta, è necessario mettere a sistema la nuova curva di domanda e la nuova curva di offerta e risolvere per i nuovi valori di Q^{**} e P^{**}. Tuttavia, prima di procedere è necessario calcolare la nuova curva di domanda. Un calo della domanda del 40% significa che, a parità di prezzo, ora la quantità domandata è minore del 40%. Pertanto,

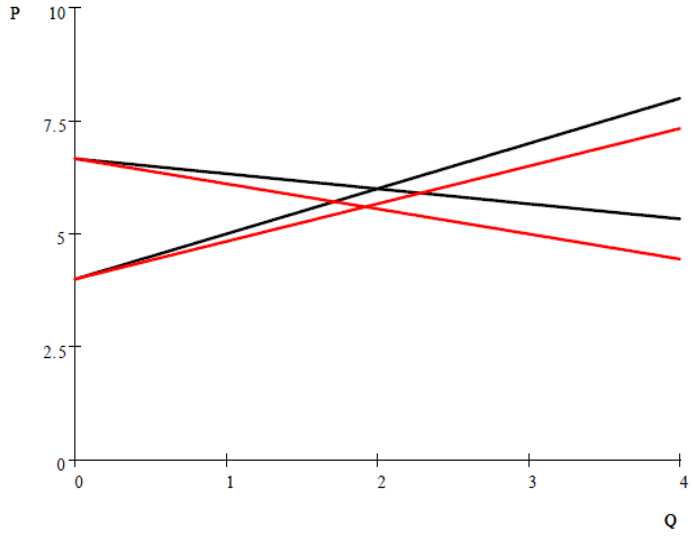
$$Q'_d = 60\%(20 - 3P) = 12 - 1,8P$$

Ponendo a sistema la nuova curva di domanda e di offerta

$$\begin{cases} Q_d = 12 - 1,8P \\ Q_s = -4,8 + 1,2P \end{cases}$$

si ottiene il nuovo equilibrio di mercato (Q^{**}, P^{**}) ossia $(1,92; 5,6)$. Si noti che il nuovo equilibrio presenta una quantità di equilibrio più bassa e un prezzo di equilibrio più basso

(c) Le due configurazioni di equilibrio sono rappresentate nella figura sottostante. Si noti che le curve hanno modificato la pendenza mentre le intercette verticali non sono cambiate. Diversa sarebbe stata la situazione se gli shock avessero modificato le curve, ad esempio, in questo modo: $Q_d = 40 - 3P$ e $Q_s = 2 + P$ (Verificatelo!).



(c1) Il termine noto sulle ordinate è il punto che si ottiene ponendo a zero la quantità. Ad esempio, il termine noto della Q_d è:

Q_d = 0=12-1,8P => P=(12/1,8)=6,7. Stesso risultato per Q_d = 0=20-3P

Il termine noto di Q_s è negativo mentre quello di Q_d è positivo poiché il termine noto sulle ascisse è il punto che si ottiene ponendo a zero i prezzi. Ad esempio, il termine noto della Q_d è:

Q_d =12 -0 => Q_d =12. Ciò ha una sua logica: se il prezzo è nullo il consumatore domanda la max Q (ha solo il vincolo dei suoi gusti).

Nel caso della Q_s = -4+P è:

Q_s = -4 +0 = -4. Anche ciò ha una sua logica: se il prezzo è nullo il produttore non offre nulla (non si può produrre una Q<0. Cfr. punto d). Analiticamente ci sarebbe da dire, ma fermiamoci qui.

(d) Le curve di domanda e di offerta hanno un senso economico quando Q≥0 e P≥0 (anche se sappiamo che il bazooka monetario…) Pertanto, la curva di offerta sarà sempre positiva nel primo quadrante (l'intercetta verticale è pari a 4). La domanda ha senso economico solo per 0 ≤ P ≤ 20/3. Le stesse considerazioni valgono successivamente agli shock sulla domanda e sull'offerta.

(e) Le elasticità delle due domande e delle due offerte al prezzo, calcolate nei rispettivi punti di equilibrio, prima e dopo gli shock, sono:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_P^{Q_d} &= \frac{dQ^d}{dP}\frac{P_0}{Q_0^d} = -3 \cdot \frac{6}{2} = -9 \\
\varepsilon_P^{Q_s} &= \frac{dQ^s}{dP}\frac{P_0}{Q_0^s} = 1 \cdot \frac{6}{2} = 3 \\
\varepsilon_{P'}^{Q'_d} &= \frac{dQ'^d}{dP'}\frac{P'_0}{Q'^d_0} = -1,8 \cdot \frac{5,6}{1,92} = -5,25 \\
\varepsilon_{P'}^{Q'_s} &= \frac{dQ'^s}{dP'}\frac{P'_0}{Q'^s_0} = 1,2 \cdot \frac{5,6}{1,92} = 3,5
\end{aligned}
$$

Infatti:

I rapporti incrementali (dQ/dP) sono le pendenze delle relative curve, i.e. i loro coefficienti angolari.

I rapporti ai livelli (P/Q) sono quelli di equilibrio (quelli "asteriscati").

ESERCIZIO 4

Si consideri il mercato del bene Q_F le cui funzioni di domanda e di offerta sono rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} Q_F^d &= 65 - 4P_F + P_G + 2R \\ Q_F^s &= 50 + 2P_F - P_{input} \end{aligned}$$

dove $R = 25$ è il reddito, $P_G = 5$ è il prezzo del bene Q_G, $P_{input} = 10$ è il prezzo delle materie utilizzate per produrre Q_F.

a) Calcolare l'equilibrio di mercato.

b) Calcolare le seguenti elasticità nel punto di equilibrio del mercato

- l'elasticità della domanda al prezzo
- l'elasticità dell'offerta al prezzo
- l'elasticità della domanda al reddito
- l'elasticità della domanda al prezzo del bene Q_G
- l'elasticità dell'offerta al prezzo dei fattori produttivi, P_{input}

SOLUZIONE:

a) L'equilibrio di mercato si determina mettendo a sistema le due funzioni di domanda e di offerta. In tal modo, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite (Q_F^*, P_F^*):

$$\begin{cases} Q_F^d = 65 - 4P_F + 5 + 2 \cdot 25 \\ Q_F^s = 50 + 2P_F - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_F^d = 120 - 4P_F \\ Q_F^s = 40 + 2P_F \end{cases} \Leftrightarrow 120 - 4P_F = 40 + 2P_F \Leftrightarrow \left(Q_F^* = \frac{200}{3}; P_F^* = \frac{40}{3} \right)$$

b) Le elasticità sono:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{P_F}^{Q_F^d} &= \frac{dQ_F^d}{dP_F} \frac{P_F}{Q_F^d} = -4 \cdot \frac{40/3}{200/3} = -\frac{4}{5} = -0,8 \\
\varepsilon_{P_F}^{Q_F^s} &= \frac{dQ_F^s}{dP_F} \frac{P_F}{Q_F^s} = 2 \cdot \frac{40/3}{200/3} = \frac{2}{5} = 0,4 \\
\varepsilon_{R}^{Q_F^d} &= \frac{dQ_F^d}{dR} \frac{R}{Q_F^d} = 2 \cdot \frac{25}{200/3} = \frac{3}{4} = 0,75 \\
\varepsilon_{P_G}^{Q_F^d} &= \frac{dQ_F^d}{dP_G} \frac{P_G}{Q_F^d} = 1 \cdot \frac{5}{200/3} = \frac{3}{40} = 0,075 \\
\varepsilon_{P_{input}}^{Q_F^s} &= \frac{dQ_F^s}{dP_{input}} \frac{P_{input}}{Q_F^s} = -1 \cdot \frac{10}{200/3} = -\frac{3}{20} = -0,15
\end{aligned}$$

Si noti che il bene considerato è un *bene normale* (il consumo di Q_F cresce al crescere del reddito)

ESERCIZIO 5

Si consideri il mercato di un bene le cui funzioni di domanda e di offerta sono rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{l} Q^d = 10 + \frac{10}{P} \\ Q^s = 20 - \frac{40}{P} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} P = \frac{10}{Q^d - 10} \\ P = \frac{40}{20 - Q^s} \end{array}$$

a) Si determini l'equilibrio di mercato.

b) Si calcolino l'elasticità della domanda e dell'offerta al prezzo nel punto di equilibrio del mercato.

SOLUZIONE:

a) L'equilibrio di mercato si determina mettendo a sistema le due funzioni di domanda e di offerta e risolvendo per le due incognite (Q^*, P^*):

$$\begin{cases} Q^d = 10 + \frac{10}{P} \\ Q^s = 20 - \frac{40}{P} \end{cases} \Leftrightarrow 10 + \frac{10}{P} = 20 - \frac{40}{P} \Leftrightarrow (Q^* = 12; P^* = 5)$$

b) Per calcolare le elasticità conviene sempre esprimere la domanda e l'offerta in modo diretto, ossia come $Q = f(P)$.

Calcoliamo prima le derivate prime della domanda rispetto al prezzo e dell'offerta rispetto al prezzo: $\frac{dQ^d}{dP}$ e $\frac{dQ^s}{dP}$.

$* \ \frac{dQ^d}{dP} = -\frac{10}{P^2}$ che nel punto di equilibrio corrisponde a

$$\left.\frac{dQ^d}{dP}\right|_{P=P^*} = -\frac{10}{(5)^2} = -\frac{2}{5} = -0,4$$

$* \ \frac{dQ^s}{dP} = \frac{40}{P^2}$ che nel punto di equilibrio corrisponde a $\left.\frac{dQ^s}{dP}\right|_{P=P^*} =$

$$\frac{40}{(5)^2} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Ora possiamo calcolare le elasticità:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_P^{Q^d} &= \frac{dQ^d}{dP}\frac{P}{Q^d} = -\frac{2}{5}\frac{5}{12} = -\frac{1}{6} \\
\varepsilon_P^{Q^s} &= \frac{dQ^s}{dP}\frac{P}{Q^s} = \frac{8}{5}\frac{5}{12} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 6 (dall'elasticità alle curve D e O)

Si consideri un mercato descritto da curve lineari di domanda e di offerta. Alcune analisi di mercato hanno dimostrato che l'elasticità della domanda al prezzo è pari a $-0,2$, mentre l'elasticità dell'offerta al prezzo è pari a $0,4$. In equilibrio vengono scambiate sul mercato $Q^* = 10$ al prezzo di $P^* = 2$.

Si derivino le curve lineari di domanda e di offerta.

IMPOSTAZIONE:

Possiamo scrivere le generiche funzioni lineari di domanda e di offerta in questo modo:

$$\text{DOMANDA:} \qquad Q_d = a - bP \Leftrightarrow P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q_d$$

$$\text{OFFERTA:} \qquad Q_s = c + dP \Leftrightarrow P = \frac{1}{d}Q_s - \frac{c}{d}$$

Supponiamo di conoscere i valori delle elasticità della domanda e dell'offerta al prezzo e i valori di equilibrio del mercato: P^*, Q^*, $\varepsilon_P^{Q_d}$ e $\varepsilon_P^{Q_s}$. Per determinare nei casi specifici ed eventualmente disegnare le curve di domanda e di offerta dobbiamo stimare i valori delle costanti a, b, c e d.

Per fare ciò, si ricordi che le derivate $\frac{dQ_d}{dP}$ e $\frac{dQ_d}{dP}$ rappresentano, rispettivamente, la variazione della quantità domandata e offerta a fronte di variazioni marginali di prezzo. Dato che abbiamo ipotizzato curve di domanda e di offerta lineari, sappiamo che tali derivate sono costanti lungo le rette e che ammontano esattamente a $-b$ e d, rispettivamente, nel caso della domanda e nel caso dell'offerta. Pertanto possiamo scrivere le elasticità al prezzo in questo modo, supponendo di doverle calcolare in un particolare punto (ad esempio, nel punto di equilibrio del mercato considerato):

$$\begin{aligned} \varepsilon_P^{Q_d} &= \frac{dQ_d}{dP}\frac{P^*}{Q_d^*} = -b\frac{P^*}{Q_d^*} \\ \varepsilon_P^{Q_s} &= \frac{dQ_s}{dP}\frac{P^*}{Q_s^*} = d\frac{P^*}{Q_s^*} \end{aligned}$$

Da queste due equazioni possiamo determinare i valori di b e d.

Successivamente, possiamo sostituire i valori di equilibrio P*, Q* - e i parametri b, d prima trovati - nelle funzioni di domanda e di offerta che abbiamo scritto più sopra. Così facendo possiamo calcolare anche a e c. Insomma, *la logica è calcolare in sequenza le incognite*.

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_P^{Q_d} &= \frac{dQ_d}{dP}\frac{P^*}{Q_d^*} = -b\frac{P^*}{Q_d^*} \Rightarrow -0,2 = -b\frac{2}{10} \Rightarrow b = 1 \\
\varepsilon_P^{Q_s} &= \frac{dQ_s}{dP}\frac{P^*}{Q_s^*} = d\frac{P^*}{Q_s^*} \Rightarrow 0,4 = d\frac{2}{10} \Rightarrow d = 2
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori di equilibrio e di b e d nelle generiche funzioni di domanda e di offerta possiamo stimare a e c.

$$Q_d^* = a - bP^* \Rightarrow 10 = a - 1 \cdot 2 \Rightarrow a = 12$$

$$Q_s^* = c + dP^* \Rightarrow 10 = c + 2 \cdot 2 \Rightarrow c = 6$$

Infine, possiamo scrivere le funzioni specifiche della domanda e dell'offerta:

$$Q_d = a - bP \Rightarrow Q_d = 12 - P$$

$$Q_s = c + dP \Rightarrow Q_s = 6 + 2P$$

ESERCIZIO 7

Si consideri un consumatore le cui preferenze tra due beni x_1 e x_2 sono rappresentate dalla funzione di utilità $u(x_1, x_{2)} = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$. Il consumatore dispone di un reddito $R = 800$. I prezzi di mercato dei due beni sono, rispettivamente, $p_1 = 2$ e $p_2 = 4$.

a) Si determini analiticamente la scelta ottima del consumatore.

b) Si rappresenti graficamente il problema.

SOLUZIONE:

(a) L'individuo sceglierà quella combinazione di beni che massimizza la propria utilità, rispettando il vincolo di bilancio a cui è soggetto. In termini più generali, possiamo scrivere il problema del consumatore in questo modo:

$$\begin{aligned} \max_{x_1 x_2} u(x_1 x_2) &= x_1^{1/4} x_2^{3/4} \\ s.t. \quad 800 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Una volta impostato il problema, possiamo seguire due procedure equivalenti.

Uguaglianza tra SMS e rapporto tra i prezzi

Questo metodo consta di 4 fasi:

I) Determinare il SMS (pendenza della curva di indifferenza in valore assoluto). In valore assoluto, il saggio marginale di sostituzione tra due beni è pari al rapporto tra le utilità marginali:

$$|SMS| = \frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{\frac{1}{4} x_1^{(-3/4)} x_2^{3/4}}{\frac{3}{4} x_1^{1/4} x_2^{(-1/4)}} = \frac{1}{3} \frac{x_2}{x_1}$$

II) Determinare il rapporto tra i prezzi (pendenza del vincolo di bilancio in valore assoluto):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{4}$$

III) Uguagliare SMS e rapporto tra i prezzi (condizione di ottimo o di tangenza - questa uguaglianza impone che nel punto di ottimo la curva d'indifferenza più esterna sia tangente al vincolo di bilancio, ossia che le due curve abbiano la medesima pendenza):

$$|SMS| = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{4}$$

IV) Mettere a sistema il vincolo di bilancio con l'equazione che uguaglia il SMS e il rapporto tra i prezzi e risolvere il sistema di due equazioni in due incognite. In questo modo si ottengono le quantità dei beni che compongono il paniere ottimale.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{4} \\ 800 = 2x_1 + 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}x_1 \\ 800 = 2x_1 + 4\left(\frac{3}{2}x_1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 100 \\ x_2^* = 150 \end{cases}$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Per memoria, riporto il problema che deve risolvere il nostro consumatore walrasiano:

$$\begin{aligned} \max_{x_1 x_2} u(x_1 x_2) &= x_1^{1/4} x_2^{3/4} \\ s.t. \quad 800 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Questo metodo richiede che venga impostata una particolare funzione ausiliaria da massimizzare, chiamata Lagrangiana. Questa funzione fonde in un'unica formula il vincolo di bilancio scritto in forma implicita e la funzione da massimizzare (o minimizzare):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= u(x_1 x_2) - \lambda \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 - R\right] \\
\mathcal{L} &= x_1^{1/4} x_2^{3/4} - \lambda \left[2x_1 + 4x_2 - 800\right]
\end{aligned}
$$

Per risolvere il problema è necessario determinare le cosiddette condizioni del primo ordine (note anche come F.O.C. o C.P.O.), ossia calcolare le derivate parziali della Lagrangiana rispetto a x_1, x_2, λ e porle uguale a zero:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{4} x_1^{(-3/4)} x_2^{3/4} - 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 0 \Rightarrow \frac{3}{4} x_1^{1/4} x_2^{(-1/4)} - 4\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow 2x_1 + 4x_2 - 800 = 0
\end{aligned}
$$

Esplicitando λ dalle prime due condizioni del primo ordine e combinando le due equazioni, si ottiene un'unica equazione in due incognite (x_1 e x_2).

$$
\begin{array}{l}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{3/4} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{16} x_1^{1/4} x_2^{-1/4}
\end{array}
\Rightarrow \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{3/4} = \frac{3}{16} x_1^{1/4} x_2^{-1/4} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} x_1
$$

Successivamente, mettendo a sistema la relazione così ottenuta con il vincolo di bilancio, è possibile determinare i valori ottimali di x_1^* e x_2^*.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}x_1 \\ 800 = 2x_1 + 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 100 \\ x_2^* = 150 \end{cases}$$

Due cose da notare:

1) Con entrambi i metodi i risultati sono gli stessi (X_1=100; X_2=150).

2) Sostituendo X_1=100 e X_2=150 nel vincolo di bilancio, l'uguaglianza è rispettata.