ESERCITAZIONE 4 (5/11/2014)

ESERCIZIO 1

1. Cosa rappresenta la funzione di produzione?

La funzione di produzione associa ad un data allocazione di input (Q_k; Q_L) un certo livello di output (Y)

1. Cosa rappresenta l'isoquanto?

L'isoquanto rappresenta il luogo geometrico di tutte le possibili allocazioni di input che consentono di ottenere un medesimo livello di output.

2. In che spazio cartesiano rappresentiamo gli isoquanti?

Nello spazio (y;x) (capitale; lavoro). Più in generale nello spazio (y;x) (input1; input2).

3. L'isoquanto è inclinato positivamente o negativamente? Perché?

L'isoquanto è inclinato negativamente perché all'aumentare della quantità usata di un fattore di produzione (input), la quantità dell'altro dovrà necessariamente ridursi al fine di mantenere inalterato il livello di output.

4. Cosa rappresenta il saggio marginale di sostituzione tecnica (SMST)?

Il SMST rappresenta l'inclinazione degli isoquanti e misura esattamente di quanto debba ridursi il fattore di produzione presente sull'asse Y all'aumentare di una unità del fattore di produzione presente sull'asse X al fine di mantenere inalterato il livello di output.

5. Come si calcola il saggio marginale di sostituzione tecnica (SMST)?

Il SMST si può calcolare in due diversi modi equivalenti tra loro. Il primo ottiene il SMST come rapporto tra la variazione della quantità dell'input Y rispetto alla variazione della quantità dell'input X a parità di isoquanto. Questo modo richiede la conoscenza delle coordinate dei punti sull'isoquanto. Il secondo ottiene il SMST come rapporto delle produttività marginali e pertanto richiede la conoscenza delle stesse.

6. Data la seguente tabella calcolare il saggio marginale di sostituzione tecnica (SMST) nei punti di coordinate (x;y) (4;3) e (x;y) (16;6)

Isoquanto I		Isoquanto II	
Capitale (Y)	Lavoro (X)	Capitale (Y)	Lavoro (X)
1	10	5	20
2	8	6	16
3	4	10	8
4	1	12	2
5	0.5	14	1
6	0.3	18	0.6
7	0.15	22	0.3

Nel punto di coordinate (x;y) (4;3) il SMST è dato da: $SMST = -\frac{2-3}{8-4} = 1/4$

Nel punto di coordinate (x;y) (16;6) il SMST è dato da: $SMST = -\frac{5-6}{20-16} = 1/4$

7. Cosa rappresenta la produttività marginale di un fattore di produzione x_i? Come si calcola?

La produttività marginale di un fattore x_i rappresenta la variazione dell'output indotta da una variazione unitaria della quantità utilizzata di quel fattore di produzione. La produttività marginale di un fattore si calcola nel seguente modo: $PMg_{\mathbf{x_i}} = \frac{\Delta \mathbf{Y}}{\Delta \mathbf{X_i}}$

8. Cosa rappresenta la produttività media di un fattore di produzione x_i? Come si calcola?

La produttività media di un fattore x_i rappresenta la quantità media dell'output prodotta da una certa quantità utilizzata di quel fattore di produzione. La produttività media di un fattore si calcola nel seguente modo: $PMe_{\mathbf{x_i}} = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X_i}}$

9. Data la seguente tabella calcolare per il fattore lavoro la produttività media e la produttività marginale. Rappresentare graficamente la funzione di produzione, la produttività media e la produttività marginale.

capitale (Y)	lavoro (X)	output	$PMg_{\mathbf{x_i}}$	$PMe_{\mathbf{x_i}}$
1	0	0	2	0
1	1	2	4	2
1	2	6	5	3
1	3	11	4.5	3.6
1	4	15.5	4	3.875
1	5	19.5	2	3.9
1	6	21.5	-	3.58

Per la rappresentazione grafica sull'asse delle x vi sarà il lavoro (X). Sull'asse delle ordinate vi sarà l'output nel grafico della f.ne di produzione, la PMgx nel caso della produttività marginale, e PMex nel caso della media. Volendo si possono mettere i tre grafici in uno.

ESERCIZIO 2

1. Data la funzione di produzione $q = x_1 * x_2$ si calcoli l'allocazione ottima (la combinazione di input che minimizza il costo totale) sapendo che l'impresa intende produrre una quantità pari a q=100 e sapendo che il costo degli input è rispettivamente $w_1 = 5$; $w_2 = 8$

L'allocazione ottima è quella in corrispondenza della quale si verifica l'uguaglianza del SMST con il rapporto tra i prezzi degli input produttivi. Pertanto per identificare l'allocazione ottima, bisognerà calcolare la generica espressione del SMST. Sappiamo che il <u>valore</u> del SMST in uno <u>specifico punto</u> dell'isoquanto può essere calcolato conoscendo le coordinate dei punti dell'isoquanto. Ma per calcolare l'espressione <u>funzionale generica</u> dell'isoquanto occorre ottenere le espressioni delle produttività marginali e farne il rapporto.

$$SMST = \frac{PMgx_1}{PMgx_2}$$

Dato che $PMgx_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = x_2$ e che $PMgx_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = x_1$

Allora

$$SMST = \frac{PMgx_1}{PMgx_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

La condizione di ottimo implica che $SMST = \frac{w_1}{w_2} = \frac{5}{8}$ da cui si ottiene agevolmente che $\frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{8}$ ovvero che $x_2 = \frac{5}{8} * x_1$

Avendo ricavato la relazione tra gli input, possiamo utilizzare la seconda condizione posta dal problema. Il livello di output desiderato deve essere pari a 100. Dovrà valere la condizione

$100 = x_1 * x_2 = x_1 * \frac{5}{8} * x_1 = \frac{5}{8} * {x_1}^2$ da cui si ricava agevolmente che $\sqrt{100 * \frac{8}{5}} = x_1$ e che quindi $x_1 = 12.65$

Utilizzando la condizione di ottimo $x_2 = \frac{5}{8} * x_1$ possiamo ricavare anche il valore di x_2 che sarà pari a $x_2 = 7.90$

2. Ottenere il livello di costo minimo corrispondente all'allocazione ottima

Il costo sarà dato dai prezzi per le scelte ottimali e sarà pari a

$C = w_1 * x_1 + w_2 * x_2 = 5 * 12.65 + 8 * 7.90 = 126.45$

ESERCIZIO 3

Dati i valori di quantità, prezzo e costo totale, calcolate i costi medi, i costi marginali, i profitti totali e i profitti unitari. Indicare le quantità in corrispondenza delle quali l'impresa massimizza i propri profitti totali.

quantità	prezzo	costi totali	costi medi	costi marginali	profitti totali	profitti unitari
0	6,5	100				
20	6,5	260	13,00	8	-130	-6,50
40	6,5	400	10,00	7	-140	-3,50
60	6,5	520	8,67	6	-130	-2,17
80	6,5	620	7,75	5	-100	-1,25
100	6,5	700	7,00	4	-50	-0,50
120	6,5	760	6,33	3	20	0,17
140	6,5	800	5,71	2	110	0,79
160	6,5	820	5,13	1	220	1,38
180	6,5	880	4,89	3	290	1,61
<u>200</u>	<u>6,5</u>	<u>980</u>	<u>4,90</u>	<u>5</u>	<u>320</u>	<u>1,60</u>
<u>220</u>	<u>6,5</u>	<u>1110</u>	<u>5,05</u>	<u>6,5</u>	<u>320</u>	<u>1,45</u>
240	6,5	1270	5,29	8	290	1,21
260	6,5	1450	5,58	9	240	0,92

Si hanno due quantità nelle quali i profitti sono massimi.

Inoltre, si può dedurre di essere in concorrenza perfetta in quanto per q=220 si ha prezzo=costo marginale.

ESERCIZIO 4

La funzione di produzione di un'impresa è $f(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$.

Supponiamo che l'impresa impieghi attualmente 16 unità del fattore 2 e che non possa variare questa quantità nel breve periodo.

Indichiamo con p il prezzo dell'output dell'impresa e con w_1 il prezzo unitario del fattore 1.

Vogliamo determinare la quantità di x_1 che l'impresa sceglierà di impiegare e la quantità di output prodotta.

Poiché nel breve periodo il livello di impiego del fattore 2 deve essere 16, l'output sarà $f(x_1,16)=4x_1^{1/2}$.

Otteniamo il prodotto marginale di x_1 calcolando la derivata dell'output rispetto a x_1 , che in questo caso è uguale a $2x_1^{-1/2}$.

Se stabiliamo che il valore del prodotto marginale sia uguale al suo prezzo avremo $p2x_1^{-1/2} = w_1$ che possiamo risolvere per determinare il valore di x_1.

Troviamo che $x_1=(2p/ w_1)^2$.

Sostituendo questo risultato nella funzione di produzione vediamo che l'impresa sceglierà di produrre $4x_1^{1/2}=8p/ w_1$ unità di output.

ESERCIZIO 5

La funzione di produzione di un'impresa è $f(x_{1,}x_2)=(\surd\, x_1 + 3\surd\, x_2\,)^2$.

Il prezzo del fattore 1 è $w_1=1$ e il prezzo del fattore 2 è $w_2=1$.

Vogliamo determinare la combinazione di input più economica per produrre 16 unità di output.

A tale scopo dovremo individuare un punto in corrispondenza del quale il saggio tecnico di sostituzione è uguale a $-w_1/\, w_2$.

In questo caso il saggio tecnico di sostituzione è $TRS(x_{1,}x_2)=-(1/3)(x_1/x_1)^{1/2}$, perciò avremo

$-(1/3)(x_2/x_1)^{1/2} = -w_1/\, w_2 = -1$ che possiamo semplificare ottenendo $x_2=9\, x_1$.

Sappiamo dunque che la combinazione di input scelta deve trovarsi sulla retta con equazione $x_2=9\, x_1$.

Poiché vogliamo determinare il modo meno costoso di produrre 16 unità la combinazione di input scelta deve soddisfare l'equazione $(\surd\, x_1 + 3\surd\, x_2\,)^2=16$, ovvero $(\surd\, x_1 + 3\surd\, x_2\,)=4$.

Possiamo quindi sostituire $x_2=9\, x_1$ nell'equazione precedente in modo da ottenere $(\surd\, x_1 + 3\surd 9\, x_1\,)=4$ che semplificata ci dà $10\surd\, x_1=4$. Quindi $x_1=16/100$ e $x_2=9\, x_1=144/100$.