# Microeconomia - Problem set 6 - soluzione

(Prof. Paolo Giordani - TA: Pierluigi Murro)

14 Maggio 2015

**Esercizio 1.**

Si consideri la seguente matrice dei payoffs:

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | S | D |
| 1 | A | $18, 12$ | $30, 70$ |
| | B | $70, 30$ | $42, 28$ |

Quale dei due giocatori ha una strategia dominante? Qual è la soluzione del gioco?

*Risposta*

Verifichiamo che 2 non ha strategie dominanti in quanto $12 < 70$ e $30 > 28$. Invece B è strategia dominante per 1 in quanto $70 > 18$ e $42 > 30$. Sapendo che 1 gioca sempre B, 2 gioca S in quanto $30 > 28$.

L'equilibrio di Nash è rappresentato quindi dalla coppia di strategie (B,S).

**Esercizio 2.**

Si consideri la seguente matrice dei payoffs:

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | S | D |
| 1 | A | $90, 90$ | $0, 36$ |
| | B | $36, 0$ | $18, 18$ |

Esistono strategie dominanti? Quali sono gli equilibri di Nash?

*Risposta*

Notiamo che il gioco è simmetrico. Nessun giocatore ha strategie dominanti in quanto $90 > 36$ e $0 < 18$.
Il gioco ammette due equilibri di Nash: (A,S) e (B,D). Inoltre, la coppia di strategie (A,S) è pareto-efficiente, in quanto in corrispondenza di questa allocazione non è possibile migliorare la situazione di un giocatore (aumentare il payoff) senza peggiorare la situazione dell'altro giocatore. La coppia di strategie (B,D) è invece pareto-inefficiente.

**Esercizio 3.**

Si consideri la seguente matrice dei payoffs:

| | | 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| | T | $24, 24$ | $30, 25$ | $36, 20$ | $42, 12$ |
| | U | $25, 30$ | $32, 32$ | $41, 30$ | $48, 24$ |
| 1 | V | $20, 36$ | $30, 41$ | $40, 40$ | $50, 36$ |
| | Z | $12, 42$ | $24, 48$ | $36, 50$ | $48, 48$ |

Risolvete il gioco tramite l'eliminazione successiva delle strategie dominate.
*Risposta*
Notiamo che anche in questo caso il gioco è simmetrico. Per il giocatore 2 la strategia A è dominata da B in quanto $24 < 25$, $30 < 32$, $36 < 41$ e $42 < 48$. Inoltre, sempre per 2, la strategia D è dominata da B e C in quanto $12 < 25, 20$; $24 < 32, 30$; $36 < 41, 40$ e $48 \leq 48, 50$. Simmetricamente per 1 T è dominata da U, e Z è dominata da U e V. Eliminate le colonne A e D, e le righe T e Z rimaniamo con un gioco 2x2 simmetrico composto dalle colonne B e C, e dalle righe U e V.
L'equilibrio di Nash è dato dalla coppia di strategie (U,B). Tale equilibrio non è pareto-efficiente: notiamo infatti che l'allocazione (V,C) consentirebbe ad entrambi i giocatori di aumentare i payoff.

**Esercizio 4.**

Supponete che Philips e Sony siano le uniche due imprese che producono un nuovo tipo di televisione. I payoffs derivanti dal lanciare questo prodotto nel mercato sono riassunti nella tabella riportata sotto:

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | E | NE |
| 1 | E | $-40, -40$ | $250, 0$ |
| | NE | $0, 250$ | $0, 0$ |

1. Esiste una strategia dominante?

2. Quali sono gli equilibri di Nash?

3. Cosa succede se la Philips ha il vantaggio della prima mossa? (*rappresentare il gioco in forma sequenziale. Nota: se la Philips non entra, la Sony può comunque decidere di entrare oppure no nel nuovo mercato*). Individuare l'equilibrio perfetto nei sottogiochi.

4. Confrontare il gioco in forma simultanea e il gioco in forma sequenziale.

*Risposta*

1. Per entrambi i giocatori non esiste una strategia dominante: per il giocatore 1 la strategia Entrare rappresenta la miglior risposta qualora il giocatore 2 decidesse di Non entrare, mentre la strategia Non entrare rappresenta la miglior risposta qualora 2 scegliesse di entrare nel nuovo mercato. Essendo il gioco simmetrico, possiamo dedurre delle conclusioni analoghe per il giocatore 2.

2. Abbiamo due equilibri di Nash: (E,NE) e (NE,E).

3. L'equilibrio perfetto nei sottogiochi è rappresentato dalla coppia di strategie (E,NE): se la Philips entra nel mercato, la miglior risposta per la Sony è di non entrare e di conseguenza la Phillips ottiene un payoff pari a 250; qualora la Philips decidesse di non entrare, la miglior risposta per la Sony sarebbe invece di entrare nel mercato e di conseguenza la Philips percepirebbe un payoff nullo. Per cui la scelta è tra entrare e percepire 250 oppure non entrare ed ottenere zero: la scelta è quindi Entrare.

4. Nel gioco sequenziale l'equilibrio è costituito da una sola coppia di strategie, mentre nel gioco in forma simultanea abbiamo individuato due equilibri di Nash: se la Philips ha la possibilità di fare la prima mossa, ha convenienza ad entrare nel nuovo mercato poichè la minaccia da parte della Sony di entrare non è credibile.

**Esercizio 5.**

Considerate un duopolio in cui la curva di domanda è $p = 150 - Q$, dove $Q = q_1 + q_2$. Entrambe le imprese hanno un costo marginale pari a 30.

1. Calcolate le quantità individuali e totali ed il prezzo di equilibrio nel caso le imprese competano à la Cournot. Calcolate il surplus del consumatore e il benessere sociale.

2. Supponete che le imprese colludano e decidano di dividere i prodotti di monopolio in due parti uguali. Calcolate le quantità individuali e totali ed il nuovo prezzo di equilibrio. Calcolate il surplus del consumatore e il benessere sociale.

3. Illustrate perché l'accordo collusivo non è sostenibile.

4. Supponete che le imprese competano à la Stackelberg con l'impresa 1 come leader. Trovate le quantità individuali e totali ed il nuovo prezzo di equilibrio. Calcolate il surplus del consumatore e il benessere sociale.

5. Cosa succede se le imprese competono sul prezzo (à la Bertrand). Calcolate il surplus del consumatore e il benessere sociale.

*Risposta*

1. Per individuare le quantità ottimali è necessario calcolare le funzioni di reazione di ciascuna impresa.
   L'impresa 1 fronteggia il seguente problema di massimizzazione:

   $$\max \pi_1 = RT - CT = pq_1 - 30q_1 = (150 - Q)q_1 - 30q_1 =$$
   $$(150 - q_1 - q_2)q_1 - 30q_1 = 150q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - 30q_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$

   Dalla condizione del primo ordine ($\frac{d\pi}{dq_1} = 0$) si ottiene la funzione di reazione dell'impresa 1:

   $$q_1 = \tfrac{120-q_2}{2}$$

   In maniera analoga per l'impresa 2:

   $$\max \pi_2 = RT - CT = pq_2 - 30q_2 = (150 - Q)q_2 - 30q_2 =$$
   $$(150 - q_1 - q_2)q_2 - 30q_2 = 150q_2 - q_2^2 - q_1q_2 - 30q_2 = 120q_2 - q_2^2 - q_1q_2$$

Dalla condizione del primo ordine ($\frac{d\pi}{dq_2} = 0$) si ottiene la funzione di reazione dell'impresa 2:

$$q_2 = \frac{120-q_1}{2}$$

Mettendo a sistema le due funzioni di reazione:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{120-q_2}{2} \\ q_2 = \frac{120-q_1}{2} \end{cases}$$

e procedendo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} q_1 = 60 - \frac{1}{2}(\frac{120-q_1}{2}) \\ q_2 = \frac{120-q_1}{2} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} q_1^{cournot} = 40 \\ q_2^{cournot} = 40 \end{cases}$$

La quantità complessivamente prodotta nel duopolio è quindi pari a:

$$Q^{cournot} = q_1 + q_2 = 40 + 40 = 80$$

mentre il prezzo di equilibrio è dato da

$$P^{cournot} = 150 - Q = 150 - 80 = 70$$

I profitti sono pari a:
$\pi_1^{cournot} = p^{cournot}q_1^{cournot} - 30q_1^{cournot} = 70 * 40 - 30 * 40 = 1600 = \pi_2^{cournot} = p^{cournot}q_2^{cournot} - 30q_2^{cournot}$.
Il surplus del produttore è dato dalla somma dei profitti individuali:

$$SP^{cournot} = \pi_1^{cournot} + \pi_2^{cournot} = 1600 + 1600 = 3200$$

Il surplus del consumatore si ottiene nel seguente modo:

$$SC^{cournot} = \frac{(p^{riserva} - p^{cournot})Q^{cournot}}{2} = \frac{(150-70)80}{2} = 3200$$

Quindi il benessere sociale è pari a:

$$W^{cournot} = SC^{cournot} + SP^{cournot} = 3200 + 3200 = 6400.$$

2. In questo caso le imprese si accordano e si comportano come un unico monopolista. Il problema di massimizzazione diventa quindi:

$$\max \pi = RT - CT = p(q_1 + q_2) - 30(q_1 + q_2) = (150 - Q)Q - 30Q =$$
$$150Q - Q^2 - 30Q = 120Q - Q^2$$

   Dalla condizione del primo ordine ($\frac{d\pi}{dQ} = 0$) si ottiene la quantità complessivamente prodotta dal monopolista:

$$120 - 2Q = 0 \rightarrow Q^M = 60$$

   Dato che le due imprese si spartiscono il mercato in parte equali la quantità individuale è $q_1^M = q_2^M = 30$.
   Il nuovo prezzo di equilibrio è pari a $P^M = 150 - Q^M = 150 - 60 = 90$.
   I profitti sono pari a:
   $\pi_1^M = p^M q_1^M - 30q_1^M = 90 * 30 - 30 * 30 = 1800 = \pi_2^M = p^M q_2^M - 30q_2^M$.
   Il surplus del produttore è dato dalla somma dei profitti individuali:

$$SP^M = \pi_1^M + \pi_2^M = 1800 + 1800 = 3600$$

   Il surplus del consumatore si ottiene nel seguente modo:

$$SC^M = \frac{(p^{riserva} - p^M)Q^M}{2} = \frac{(150-90)60}{2} = 1800$$

   Quindi il benessere sociale è pari a:

$$W^M = SC^M + SP^M = 1800 + 3600 = 5400.$$

3. Per verificare se l'accordo è sostenibile o meno, è necessario rappresentare il gioco in forma simultanea dove ciascuna impresa può scegliere se tenere fede all'accordo (ovvero colludere) oppure tradire l'accordo (e comportarsi quindi indipendentemente come farebbe nel duopolio alla Cournot). Se entrambe colludono, conseguono i profitti calcolati al punto 2 ovvero (1800,1800). Se entrambe tradiscono ci troviamo nell'equilibrio di Cournot e di conseguenza i payoff sono (1600,1600).

   Dobbiamo quindi calcolare i payoffs quando un'impresa tradisce l'accordo, mentre l'altra collude. Supponiamo che sia l'impresa 1 a tradire: essa

produce quindi la quantità che produrrebbe nel duopolio alla Cournot, ovvero $q_1 = 40$; mentre l'impresa 2 produce la quantità prevista dall'accordo ovvero $q_2 = 30$. La quantità complessivamente prodotta è quindi pari a $Q = q_1 + q_2 = 40 + 30 = 70$.
Il prezzo di mercato è $P = 150 - Q = 150 - 70 = 80$. I profitti sono rispettivamente: $\pi_1 = 80 * 40 - 30 * 40 = 2000$ e $\pi_2 = 80 * 30 - 30 * 30 = 1500$ .
Essendo le imprese uguali dal punto di vista tecnologico, otteniamo un risultato analogo quando l'impresa 2 tradisce mentre l'impresa 1 collude: $\pi_2 = 80 * 40 - 30 * 40 = 2000$ e $\pi_1 = 80 * 30 - 30 * 30 = 1500$ .
Possiamo ora rappresentare il gioco in forma simultanea:

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Tradire ($q^{cournot=40}$) | Colludere ($q^{M=30}$) |
| 1 | Tradire ($q^{cournot=40}$) | $1600, 1600$ | $2000, 1500$ |
| | Colludere ($q^{M=30}$) | $1500, 2000$ | $1800, 1800$ |

Il gioco è simmetrico e Tradire è una strategia dominante per entrambi i giocatori. L'equilibrio di strategia dominanti è (Tradire, Tradire). Esso è quindi anche un equilibrio di Nash (nessun giocatore ha incentivo a deviare). Di conseguenza l'accordo (ovvero entrambe colludono) non è sostenibile, sebbene sia Pareto-superiore (entrambe le imprese migliorerebbero il loro benessere).

4. Supponiamo che l'impresa 1 si comporti da leader mentre l'impresa 2 da follower.
L'impresa 1 fronteggia il seguente problema di massimizzazione:

$$\max \pi_1 = RT - CT = pq_1 - 30q_1 = (150 - q_1 - q_2)q_1 - 30q_1$$

data la funzione di reazione dell'impresa follower $q_2 = \frac{120-q_1}{2}$
Quindi:
$\pi_1 = 150q_1 - q_1^2 - \frac{120-q_1}{2}q_1 - 30q_1 = 150q_1 - q_1^2 - 60q_1 + \frac{1}{2}q_1^2 - 30q_1 = 60q_1 - \frac{1}{2}q_1^2$
Dalla condizione del primo ordine ($\frac{d\pi}{dq_1} = 0$) si ottiene la quantità ottimale per l'impresa leader

$$60 - q_1 = 0 \rightarrow q_1^L = 60$$

La quantità ottimale per l'impresa follower è quindi $q_2^F = 30$.

La quantità complessivamente prodotta è quindi pari a $Q^{Stackelberg} = q_1^L + q_2^F = 60 + 30 = 90$.

Il prezzo di equilibrio è $P^{Stackelberg} = 150 - Q^{Stackelberg} = 150 - 90 = 60$.

I profitti sono rispettivamente: $\pi_1^{Stackelberg} = 60 * 60 - 30 * 60 = 1800$ e $\pi_2^{Stackelberg} = 60 * 30 - 30 * 30 = 900$ .

Il surplus del produttore è dato dalla somma dei profitti individuali:

$$SP^{Stackelberg} = \pi_1^{Stackelberg} + \pi_2^{Stackelberg} = 1800 + 900 = 2700$$

Il surplus del consumatore si ottiene nel seguente modo:

$$SC^{Stackelberg} = \frac{(p^{riserva} - p^{Stackelberg})Q^{Stackelberg}}{2} = \frac{(150-60)90}{2} = 4050$$

Quindi il benessere sociale è pari a:

$$W^{Stackelberg} = SC^{Stackelberg} + SP^{Stackelberg} = 4050 + 2700 = 6750.$$

5. Nel duopolio alla Bertrand le imprese competono sul prezzo: ciascuna abbaserà il prezzo fino a che esso eguaglia il costo marginale (nota che negli altri casi il prezzo di mercato è sempre superiore al costo marginale). Considerato che le imprese hanno la stessa tecnologia (funzione di costo) hanno quindi anche lo stesso costo marginale. Si riproduce così un equilibrio concorrenziale (la condizione di ottimo è infatti P=MC):

$$P^{bertrand} = MC = 30 \text{ e } Q^{bertrand} = 150 - P^{bertrand} = 150 - 30 = 120.$$

Il surplus del consumatore si ottiene nel seguente modo:

$$SC^{bertrand} = \frac{(p^{riserva} - p^{bertrand})Q^{bertrand}}{2} = \frac{(150-30)120}{2} = 7200$$

I profitti delle imprese sono nulli: il costo marginale coincide infatti con il costo medio. Di conseguenza il benessere sociale coincide con il surplus del consumatore: $W^{bertrand} = 7200$.

**Esercizio 6.**

Supponiamo che nel mercato operino due imprese con tecnologie differenti: $CT_1 = 2q_1$ e $CT_2 = 4q_2$ rispettivamente.

La domanda di mercato inversa è $p = 12 - Q$ dove $Q = q_1 + q_2$.

1. Calcolate le quantità individuali e totali ed il prezzo di equilibrio nel caso le imprese competano à la Cournot. Calcolate il surplus del consumatore e il benessere sociale.
2. Calcolate le quantità individuali e totali ed il prezzo di equilibrio nel caso le imprese competano à la Bertrand. Calcolate il surplus del consumatore e il benessere sociale.

*Risposta*

1. Per individuare le quantità ottimali è necessario calcolare le funzioni di reazione di ciascuna impresa.

   L'impresa 1 fronteggia il seguente problema di massimizzazione:

   $$\max \pi_1 = RT - CT = pq_1 - 2q_1 = (12 - Q)q_1 - 2q_1 =$$
   $$(12 - q_1 - q_2)q_1 - 2q_1 = 12q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - 2q_1 = 10q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$

   Dalla condizione del primo ordine ($\frac{d\pi}{dq_1} = 0$) si ottiene la funzione di reazione dell'impresa 1:

   $$q_1 = \tfrac{10-q_2}{2}$$

   In maniera analoga per l'impresa 2:

   $$\max \pi_2 = RT - CT = pq_2 - 4q_2 = (12 - Q)q_2 - 4q_2 =$$
   $$(12 - q_1 - q_2)q_2 - 4q_2 = 12q_2 - q_2^2 - q_1q_2 - 4q_1 = 8q_2 - q_2^2 - q_1q_2$$

   Dalla condizione del primo ordine ($\frac{d\pi}{dq_2} = 0$) si ottiene la funzione di reazione dell'impresa 2:

   $$q_2 = \tfrac{8-q_1}{2}$$

   Mettendo a sistema le due funzioni di reazione:

   $$\begin{cases} q_1 = \frac{10-q_2}{2} \\ q_2 = \frac{8-q_1}{2} \end{cases}$$

   e procedendo con il metodo di sostituzione:

   $$\begin{cases} q_1 = 5 - \frac{1}{2}(\frac{8-q_1}{2}) \\ q_2 = \frac{8-q_1}{2} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} q_1^{cournot} = 4 \\ q_2^{cournot} = 2 \end{cases}$$

La quantità complessivamente prodotta nel duopolio è quindi pari a:

$$Q^{cournot} = q_1 + q_2 = 4 + 2 = 6$$

mentre il prezzo di equilibrio è dato da

$$P^{cournot} = 12 - Q = 12 - 6 = 6$$

I profitti sono rispettivamente pari a:

$$\pi_1^{cournot} = pq_1^{cournot} - 2q_1^{cournot} = 6 * 4 - 2 * 4 = 16$$
$$\pi_2^{cournot} = pq_2^{cournot} - 4q_2^{cournot} = 6 * 2 - 4 * 2 = 4.$$

Il surplus del produttore è dato dalla somma dei profitti individuali:

$$SP^{cournot} = \pi_1^{cournot} + \pi_2^{cournot} = 16 + 4 = 20$$

. Il surplus del consumatore si ottiene nel seguente modo:

$$SC^{cournot} = \frac{(p^{riserva} - p^{cournot})Q^{cournot}}{2} = \frac{(12-6)6}{2} = 18$$

Quindi il benessere sociale è pari a:

$$W^{cournot} = SC^{cournot} + SP^{cournot} = 18 + 20 = 38.$$

2. Nel duopolio alla Bertrand le imprese competano al ribasso sul prezzo: la guerra di prezzo avrà termine solo quando l'impresa con il costo marginale più alto uscirà dal mercato e l'altra impresa fisserà un prezzo leggermente inferiore al costo marginale del rivale. In questo caso l'impresa 1(che ha il costo marginale più basso 2<4) ha convenienza a fissare un prezzo leggermente inferiore al costo marginale dell'impresa rivale $p = 4 - \varepsilon$: in corrispondenza di questo prezzo, l'impresa 2 non può ottimizzare e di conseguenza deve uscire dal mercato ($p < MC$).
L'impresa 1 quindi serve l'intero mercato:

$$P = 12 - Q \rightarrow 4 - \varepsilon = 12 - Q \rightarrow Q^{bertrand} = q_1^{bertrand} = 8 + \varepsilon.$$

I profitti dell'impresa 1 sono pari a

$$\pi_1^{bertrand} = (4 - \varepsilon) * (8 + \varepsilon) - 2(8 + \varepsilon) = 16 - \varepsilon$$

(essendo $\varepsilon$ molto piccolo, possiamo aggregare tutti i termini di $\varepsilon$ in unico termine).
In questo caso, il surplus del consumatore è dato da:

$$SC^{betrand} = \frac{(p^{riserva} - p^{betrand})Q^{betrand}}{2} = \frac{(12-4+\varepsilon)(8+\varepsilon)}{2} = 32 + \varepsilon$$

Quindi il benessere sociale è pari a:

$$W^{bertrand} = SC^{bertrand} + SP^{bertrand} = 32 + \varepsilon + 16 - \varepsilon = 48.$$