ESERCITAZIONE 3:
Produzione e costi

Esercizio 1 (non svolto in aula ma utile): Rendimenti di scala

Determinare i rendimenti di scala delle seguenti funzioni di produzione:

a) $q = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

b) $q = x_1^{2/5} x_2^{1/5}$

c) $q = \frac{2}{3}(L + K)$

Soluzione

I rendimenti di scala indicano come varia il livello di produzione a seguito di una variazione equiproporzionale di tutti gli input. Vediamo quindi come varia q se facciamo variare entrambi i fattori nella proporzione λ.

a) $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2\sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_1^2} =$

$$= 2\sqrt{\lambda^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)} =$$

$$= 2\lambda \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \lambda q$$

Quindi questa funzione ha rendimenti di scala costanti, perché moltiplicando entrambi i fattori per λ si ottiene esattamente λ volte il livello di produzione iniziale.

b) $f\left(\lambda x_1, \lambda x_2\right) = \lambda^{2/5} x_1^{2/5} \lambda^{1/5} x_2^{1/5} =$

$$= \lambda^{3/5} x_1^{2/5} x_2^{1/5} = \lambda^{3/5} q$$

Poiché $\lambda^{3/5}$ è inferiore a 1, la funzione presenta rendimenti di scala decrescenti: ad un aumento equiproporzionale degli input, corrisponde un aumento meno che proporzionale dell'output.

c) $f\left(\lambda L, \lambda K\right) = \frac{2}{3}(\lambda L + \lambda K) = \lambda q$

Questa funzione di produzione ha rendimenti costanti.

Esercizio 2: Produzione e costi

Un'impresa utilizza una tecnologia descritta dalla seguente funzione di produzione:

$$q(L, K) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

I prezzi dei fattori lavoro e capitale sono rispettivamente $w = 4$ e $r = 9$. Nel breve periodo la dotazione di capitale è fissa e pari a $\overline{K} = 16$.

a) Determinare l'espressione delle curve di costo totale, medio e marginale di breve periodo;
b) determinare la domanda di lavoro nel breve periodo;
c) determinare la combinazione ottima di fattori nel caso in cui si voglia produrre una quantità pari a 100;
d) dimostrare che la stessa scelta ottimale dei fattori può essere ottenuta risolvendo il problema duale di massimizzazione dell'output sotto un vincolo di costo, imponendo che l'impresa possa sostenere una spesa massima per l'acquisto dei fattori pari a 1200;
e) determinare l'espressione delle curve di costo totale, medio e marginale di lungo periodo.

<u>Soluzione</u>

a) Determiniamo tramite la funzione di produzione l'impiego del fattore lavoro in funzione della quantità prodotta, tenendo presente che nel breve periodo il capitale è fisso:

$$q(L) = \sqrt{16}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L = \frac{q^2}{16}$$

Quindi il costo totale di breve periodo è

$$CT_B(q) = wL + rK = 4\frac{q^2}{16} + 9 \cdot 16 = 144 + \frac{q^2}{4}$$

Quindi il costo medio e marginale di breve periodo sono rispettivamente:

$$AC_B(q) = \frac{144}{q} + \frac{q}{4}$$

$$MC_B(q) = \frac{q}{2}$$

b) Per determinare la domanda ottimale di lavoro di breve periodo, occorre impostare la massimizzazione del profitto:

$$\Pi = pq - wL - rK$$

$$= p\left(4L^{\frac{1}{2}}\right) - 4L - 9 \cdot 16$$

Dalla massimizzazione del profitto rispetto al lavoro si ottiene:

$$\frac{dq}{dL} = 2pL^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$L = \frac{p^2}{4}$$

Questa è appunto la funzione di domanda di lavoro in funzione del prezzo.

c) La scelta ottimale dell'impresa si determina individuando l'isocosto più vicino all'origine tangente all'isoquanto che corrisponde ad una quantità pari a 100. Quindi occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{9} \\ 100 = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

In cui la prima equazione esprime l'uguaglianza tra saggio marginale di sostituzione tecnica $\left(MRTS_{K,L} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L} \right)$ e rapporto tra i prezzi dei fattori, e la seconda impone che il livello di produzione sia pari a 100.

Dalla prima equazione si ottiene $K = \frac{4}{9} L$, che sostituita nella seconda dà:

$$100 = \left(\frac{4}{9} L \right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

Da cui si ottiene $L^* = 150$ e $K^* = 66{,}\overline{6}$. I costi totali sostenuti dall'impresa sono pari a

$$CT = wL^* + rK^* = 4 \cdot 150 + 9 \cdot 66{,}\overline{6} = 1200$$

d) La stessa scelta ottimale dei fattori può essere ottenuta risolvendo il problema duale di massimizzazione dell'output sotto un vincolo di costo, imponendo che l'impresa possa sostenere una spesa massima per l'acquisto dei fattori pari a 1200. Il sistema da risolvere in questo caso è:

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{9} \\ 1200 = 4L + 9K \end{cases}$$

Da cui si ottiene appunto $L^* = 150$ e $K^* = 66{,}\overline{6}$.

e) Per determinare le curve di costo di lungo periodo occorre innanzitutto determinare come si modifica la domanda ottimale di lavoro e capitale (che nel lungo periodo non è più un input fisso) in funzione del livello di produzione. Riscriviamo quindi il sistema utilizzato nel punto c) lasciando però indicato come q un generico livello di output.

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{9} \\ q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Da cui ricaviamo le domande ottimali di K e L in funzione di q:

$$L = \frac{3}{2} q$$

$$K = \frac{2}{3} q$$

La curva di costo totale di lungo periodo è quindi:

$$CT_L(q) = 4 \frac{3}{2} q + 9 \frac{2}{3} q = 12q$$

Nel lungo periodo $AM = MC = 12$.

<u>Esercizio 3: I costi di produzione</u>

Si consideri un'impresa con la seguente funzione di produzione:

$$Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$$

I prezzi di mercato dei fattori sono $\omega_K = 1$ e $\omega_L = 2$ e il saggio marginale di sostituzione tecnica, *calcolato come rapporto tra la produttività marginale del capitale e la produttività marginale del lavoro,* è:

$$MRTS_{K,L} = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{L}{K}$$

a) Determinare le funzioni di costo totale, marginale e medio di breve periodo, supponendo che nel breve periodo l'impresa sia vincolata ad utilizzare una quantità di lavoro $\overline{L} = 3$.
b) Determinare le funzioni di costo totale, marginale e medio di lungo periodo.

<u>Soluzione</u>

a) Se il fattore di produzione lavoro è fisso nel breve periodo, la funzione di produzione diventa:

$$q = 2K^{1/2}\overline{L}^{1/2} = 2K^{1/2}3^{1/2} = 2\sqrt{3}K^{1/2}$$

Quindi la domanda dell'input variabile *K* in funzione dell'output è:

$$K = \left(\frac{q}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{q^2}{12}$$

Il costo totale di breve periodo è quindi:

$$CT_B = 1 \cdot \frac{q^2}{12}$$

Questo è il costo economico per l'impresa, ovvero il costo per l'acquisto dei fattori variabili nel breve periodo (in questo caso il capitale). La spesa totale nei fattori comprende invece anche il costo per il fattore che nel breve periodo è fisso per l'impresa (il lavoro), ma che non rientra nei costi economici in quanto il fattore fisso non ha un impiego alternativo (e quindi un costo opportunità) nel breve periodo.
Il costo marginale e il costo medio di breve periodo sono:

$$MC_B = \frac{q}{6}$$

$$AC_B = \frac{q}{12}$$

b) Nel lungo periodo tutti gli input sono variabili, quindi per ricavare la funzione di costo di lungo periodo occorre determinare prima le funzioni di domanda di entrambi i fattori in funzione dell'output:

$$\begin{cases} MRTS_{K,L} = \dfrac{\omega_K}{\omega_L} \\ q = 2K^{1/2}L^{1/2} \end{cases}$$

Quindi, dato che $MRTS_{K,L} = \frac{L}{K}$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} \frac{L}{K} = \frac{1}{2} \\ q = 2K^{1/2}L^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 2L \\ q = 2(2L)^{1/2}L^{1/2} = 2\sqrt{2}L \end{cases}$$

da cui si ricava che le funzioni di domanda dei due fattori in funzione del livello di produzione sono:

$$L = \frac{\sqrt{2}}{4}q$$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{2}q$$

Quindi la funzione di costo di lungo periodo è:

$$\begin{aligned} CT_L &= \omega_K K + \omega_L L = \\ &= 1\frac{\sqrt{2}}{2}q + 2\frac{\sqrt{2}}{4}q = \\ &= \sqrt{2}q \end{aligned}$$

I costi marginali e medi associati a questa funzione di costo di lungo periodo sono:

$$MC_L = \sqrt{2}$$

$$AC_L = \sqrt{2}$$

Il fatto che i costi medi di lungo periodo sono costanti indica che la funzione di produzione in oggetto ha rendimenti di scala costanti.

Esercizio 4: Scelta ottimale di un monopolista e imposte

Si consideri un monopolista con la seguente funzione di costo totale:

$$C(Q) = 132 + \frac{3}{4}Q^2 + 5Q$$

La domanda di mercato per il bene prodotto dal monopolista è:

$$p(Q) = 45 - \frac{1}{2}Q$$

Si determini:

a) la scelta ottimale del monopolista;
b) la scelta ottimale del monopolista in presenza di una imposta a somma fissa pari a T = 60;
c) la scelta ottimale del monopolista in presenza di una tassa unitaria sulla quantità venduta pari a $t = 10$.

Soluzione

a) L'impresa monopolista, come ogni altra impresa, sceglierà quel livello di produzione che massimizza i profitti, ovvero in corrispondenza del quale il ricavo marginale è uguale al costo marginale. I profitti dell'impresa sono:

$$\Pi(Q) = p(Q)Q - C(Q)$$

La condizione per la massimizzazione dei profitti richiede di porre uguale a zero la derivata prima di tale funzione rispetto a Q. Si noti che, poiché l'impresa monopolista è in grado di fare il prezzo, il prezzo di mercato è funzione della quantità prodotta e quindi il ricavo marginale è diverso dal prezzo (nel caso dell'impresa che non fa il prezzo, invece, il prezzo è appunto un dato per l'impresa e quindi il ricavo marginale è sempre pari al prezzo). La condizione di massimizzazione dei profitti è quindi:

$$\frac{dp(Q)}{dQ}Q + p(Q) - \frac{dC(Q)}{dQ} = 0$$

Ovvero ricavo marginale (*R'*) = costo marginale (*C'*).
Con riferimento all'esercizio in questione, per determinare l'equilibrio del monopolista occorre calcolare il costo marginale e il ricavo marginale. Il costo marginale è pari a:

$$C' = \frac{dC}{dQ} = \frac{3}{2}Q + 5$$

Il ricavo totale è

$$R = p(Q)Q = (45 - \frac{1}{2}Q)Q$$

Quindi il ricavo marginale è:

$$R' = \frac{dR}{dQ} = 45 - Q$$

Si noti che la curva del ricavo marginale ha la stessa intercetta verticale ma pendenza doppia rispetto alla curva di domanda inversa: questa è una proprietà che vale per tutte le funzioni di domanda lineari.
Per determinare la quantità ottimale prodotta dal monopolista uguagliamo il ricavo marginale al costo marginale:

$$45 - Q = \frac{3}{2}Q + 5$$

$$90 - 2Q = 3Q + 10$$

Da cui si ottiene $Q^* = 16$ e, sostituendo tale quantità nella curva di domanda, $p^* = 37$.

Il profitto corrispondente è $\Pi^* = 16 \cdot 37 - 132 - \frac{3}{4} \cdot 16^2 - 5 \cdot 16 = 188$.

b) In presenza di un'imposta a somma fissa pari a 60, la funzione obiettivo del monopolista è:

$$\Pi(Q) = p(Q)Q - C(Q) - 60$$

La condizione di ottimo rimane uguale a quella del punto a), ovvero *R' = C'* (poiché la derivata prima di 60 è pari a zero) e quindi l'equilibrio del monopolista non cambia rispetto al caso precedente. L'unica cosa che cambia è il livello del profitto di equilibrio, che passa da 188 a 128.

c) In presenza di un'imposta unitaria sulle vendite, invece, la funzione da massimizzare diventa:

$$\Pi(Q) = p(Q)Q - C(Q) - 10Q$$

E la corrispondente condizione di ottimo è:

$$45 - Q - \frac{3}{2}Q - 5 - 10 = 0$$

$$5Q = 90 - 30$$

In altri termini, l'imposta unitaria comporta un aumento del costo marginale per l'impresa, e modifica quindi la condizione di ottimo.

Risolvendo l'equazione precedente si ottiene $Q^* = 12$ e, sostituendo nella curva di domanda, $p^* = 45 - \frac{1}{2}12 = 39$.

Il profitto di equilibrio è $\Pi^* = 39 \cdot 12 - 132 - \frac{3}{4} \cdot 12^2 - 5 \cdot 12 - 10 \cdot 12 = 108$ e il gettito derivante dall'imposta è pari a $10 \cdot 12 = 120$.