G. Calzolari
E. Argentesi

ESERCITAZIONE 5:
ESERCIZI DI RIPASSO

Esercizio 1: Scelte di consumo (beni complementari)

Un consumatore ha preferenze rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x,y) = (x-8)(y-4)$$

a) Determinare la scelta ottimale del consumatore se il suo reddito monetario è pari a 440 e i prezzi dei beni sono $p_x = 10$ e $p_y = 15$.
b) Determinare l'equilibrio del consumatore nel caso in cui il prezzo del bene *x* passi da 10 a 15.
c) Determinare l'equilibrio del consumatore nel caso in cui il reddito del consumatore sia R=300.
d) Determinare l'equazione della curva di domanda per il bene *x*.
e) Calcolare l'elasticità al prezzo della domanda di *x* nel punto della curva di domanda corrispondente all'equilibrio iniziale.
f) Calcolare l'elasticità incrociata nel punto della curva di domanda corrispondente all'equilibrio iniziale.

Soluzione

a) La soluzione del problema del consumatore si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} MRS_{y,x} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ R = p_x x + p_y y \end{cases}$$

in cui la prima equazione rappresenta la condizione di tangenza tra curva di indifferenza e vincolo di bilancio e la seconda il vincolo di bilancio del consumatore. Nel nostro caso, il saggio marginale di sostituzione, dato dal rapporto $\dfrac{U'_x}{U'_y}$ (dove U'_x è l'utilità marginale del bene *x* e U'_y quella del bene *y*) è pari a

$$MRS_{y,x} = \frac{U'_x}{U'_y} = \frac{y-4}{x-8}$$

Possiamo quindi riscrivere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y-4}{x-8} = \dfrac{10}{15} \\ 440 = 10x + 15y \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$y = \frac{2x-4}{3}$$

Sostituendo questa espressione nel vincolo di bilancio, si ottiene

$$440 = 10x + 15\frac{2x-4}{3}$$

Risolvendo questa equazione in x troviamo

$$x^* = 23$$

e, per sostituzione

$$y^* = 14$$

Quindi in questo caso l'equilibrio del consumatore è dato dal paniere

$$E = \left(x^* = 23, y^* = 14\right)$$

b) Dato il nuovo prezzo di *x*, il sistema da risolvere è ora

$$\begin{cases} \dfrac{y-4}{x-8} = 1 \\ 440 = 15x + 15y \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$y = x - 4$$

e, sostituendo nella seconda,

$$x^* = \frac{50}{3}$$

per cui

$$y^* = \frac{38}{3}$$

c) Nel caso in cui R=300, con il sistema di prezzi iniziale, il sistema diviene

$$\begin{cases} \dfrac{y-4}{x-8} = \dfrac{10}{15} \\ 300 = 10x + 15y \end{cases}$$

Dalla prima equazione (che è uguale al caso a) perché il sistema di prezzi è lo stesso) si ricava

$$y = \frac{2x-4}{3}$$

che, sostituita a *y* nel vincolo di bilancio, dà

$$x^* = 16$$

e quindi

$$y^* = \frac{28}{3}$$

d) L'equazione della curva di domanda di *x* si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y-4}{x-8} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ 440 = p_x x + p_y y \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$y = \frac{p_x}{p_y}(x-8) + 4$$

Sostituendo questa espressione nel vincolo di bilancio, si ottiene

$$440 = p_x x + p_y \left[\frac{p_x}{p_y}(x-8) + 4 \right]$$

Risolvendo questa equazione per *x* troviamo la curva di domanda per *x*:

$$x = \frac{220 + 4p_x - 2p_y}{p_x}$$

sostituendo questa equazione nella prima del sistema, potremmo ottenere anche la curva di domanda per *y*.

e) La formula dell'elasticità della domanda è

$$\varepsilon_x = \frac{dx}{dp_x}\frac{p_x}{x}$$

Data la funzione di domanda di *x*, calcoliamo

$$\frac{dx}{dp_x} = -\frac{220 - 2p_y}{p_x^2}$$

Quindi l'elasticità della domanda è

$$\varepsilon_x = -\frac{220 - 2p_y}{p_x^2}\frac{p_x}{x} = -\frac{220 - 2p_y}{p_x}\frac{1}{x}$$

Sostituendo a x, p_x, p_y i valori numerici assegnati, otteniamo

$$\varepsilon_x(E) = -\frac{220 - 2 \cdot 15}{10}\frac{1}{23} = -\frac{19}{23}$$

f) La formula dell'elasticità incrociata della domanda di x rispetto al prezzo di y è

$$\varepsilon_{xy} = \frac{dx}{dp_y}\frac{p_y}{x}$$

La derivata della funzione di domanda di x rispetto al prezzo di y è

$$\frac{dx}{dp_y} = -\frac{2}{p_x}$$

Quindi l'elasticità incrociata è

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{2}{p_x}\frac{p_y}{x}$$

Sostituendo i valori numerici in corrispondenza di E, otteniamo

$$\varepsilon_{xy}(E) = -\frac{2}{10}\frac{15}{23} = -\frac{3}{23}$$

Quindi in questo caso l'elasticità incrociata della domanda è negativa: ad una variazione percentuale del prezzo di *y* corrisponde una variazione di segno opposto della quantità di *x*. In altre parole, i due beni sono COMPLEMENTARI.

Esercizio 2: Scelte di consumo (beni sostituti)

Un consumatore ha preferenze rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x, y) = (x + 6)(y + 4)$$

a) determinare la scelta ottimale del consumatore se il suo reddito monetario è pari a 20 e i prezzi dei beni sono $p_x = 4$ e $p_y = 2$;

b) determinare la curva di domanda per il bene x;

c) calcolare l'elasticità della domanda di x nel punto di ottimo;
d) calcolare l'elasticità incrociata nel punto di ottimo.

Soluzione

a) Il saggio marginale di sostituzione tra x e y è:

$$MRS_{y,x} = \frac{U'_x}{U'_y} = \frac{y+4}{x+6}$$

Quindi la soluzione del problema del consumatore si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y+4}{x+6} = \dfrac{4}{2} \\ 20 = 4x + 2y \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$y = 2x - 8$$

Sostituendo questa espressione nel vincolo di bilancio, si ottiene

$$20 = 4x + 2(2x - 8)$$

Risolvendo questa equazione in x troviamo

$$x^* = \frac{1}{2}$$

e, per sostituzione

$$y^* = 9$$

Quindi in questo caso l'equilibrio del consumatore è dato dal paniere

$$E = \left(\frac{1}{2}, 9\right)$$

b) La curva di domanda per il bene *x* si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y+4}{x+6} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ 20 = p_x x + p_y y \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$y = \frac{p_x}{p_y}(x+6) - 4$$

e, sostituendo nella seconda,

$$20 = p_x x + p_y \left[\frac{p_x}{p_y}(x+6) - 4\right]$$

per cui

$$x = \frac{10 - 3p_x + 2p_y}{p_x}$$

c) L'elasticità della domanda di *x* nel punto E (col sistema di prezzi iniziale) è data da:

$$\varepsilon_x = \frac{dx}{dp_x}\frac{p_x}{x}$$

Nel nostro caso la derivata della funzione di domanda di *x* rispetto a p_x è

$$\frac{dx}{dp_x} = -\frac{10+2p_y}{p_x^2}$$

sostituendo i valori di p_x, p_y e x corrispondenti al punto E, otteniamo

$$\varepsilon_x = -\frac{10+2\cdot 2}{4^2}\frac{4}{1/2} = -7$$

d) L'elasticità incrociata di x rispetto al prezzo di y nel punto E è data da:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{dx}{dp_y}\frac{p_y}{x}$$

Poiché le derivata della funzione di domanda di x rispetto al prezzo di y è

$$\frac{dx}{dp_y} = \frac{2}{p_x}$$

avremo

$$\varepsilon_{xy} = \frac{2}{p_x}\frac{p_y}{x} = \frac{2}{4}\frac{2}{1/2} = 2$$

Il fatto che l'elasticità incrociata sia positiva indica che i due beni sono sostituti: all'aumentare del prezzo di uno, aumenta la quantità domandata dell'altro bene.

Esercizio 3: Scelte di consumo (beni indipendenti)

Un individuo ha una funzione di utilità pari a

$$U(x,y) = x \cdot y$$

a) Trovare l'equilibrio del consumatore se $p_x = 1, p_y = 2$ e R=10.
b) Trovare la curva di domanda per x e per y.
c) Dimostrare che l'elasticità della domanda è costante per entrambi i beni.
d) Dimostrare che l'elasticità incrociata della domanda è nulla in ogni punto delle curve di domanda.

Soluzione

a) Il saggio marginale di sostituzione è pari a $MRS_{y,x} = \frac{U'_x}{U'_y} = \frac{y}{x}$.

Per determinare l'equilibrio del consumatore, occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ 10 = x + 2y \end{cases}$$

dalla prima equazione si ottiene

$$y = \frac{1}{2}x$$

Per cui, sostituendo nella seconda, avremo

$$10 = x + 2\frac{1}{2}x$$

ovvero

$$x^* = 5$$

e, per sostituzione,

$$y^* = \frac{5}{2}$$

Per cui l'ottimo del consumatore dati i prezzi e il reddito disponibile è $E = (5, \frac{5}{2})$.

b) Per determinare le equazioni delle curve di domanda per i due beni, occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \\ 10 = p_x x + p_y y \end{cases}$$

Ricavando y dalla prima e sostituendo nella seconda, il sistema diventa

$$\begin{cases} y = \frac{p_x}{p_y} x \\ 10 = p_x x + p_y \frac{p_x}{p_y} x \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene l'equazione della curva di domanda per x, ovvero

$$x = \frac{5}{p_x}$$

e, sostituendo per x nella prima si ottiene l'equazione della domanda di y

$$y = \frac{5}{p_y}$$

c) Per dimostrare che l'elasticità della domanda è costante per entrambi i beni, richiamiamo la definizione dell'elasticità al prezzo per il bene x (lo stesso ragionamento vale per il bene y)

$$\varepsilon_x = \frac{dx}{dp_x} \frac{p_x}{x}$$

Il primo termine è la derivata della funzione di domanda di x rispetto al prezzo di x, cioè

$$\frac{dx}{dp_x} = -\frac{5}{p_x^2}$$

Sostituendo questa espressione nella formula dell'elasticità della domanda, otteniamo

$$\varepsilon_x = -\frac{5}{p_x^2} \frac{p_x}{x}$$

Sostituendo a x l'equazione della curva di domanda, l'elasticità diviene

$$\varepsilon_x = -\frac{5}{p_x^2} \frac{p_x}{\frac{5}{p_x}} = -1$$

Quindi l'elasticità della domanda è costante e pari a 1 (in valore assoluto).

d) La formula dell'elasticità incrociata della domanda di x rispetto al prezzo di y è

$$\varepsilon_{xy} = \frac{dx}{dp_y}\frac{p_y}{x}$$

Nel nostro caso, osservando la funzione di domanda di x risulta immediatamente evidente come la derivata della domanda di x rispetto al prezzo di y sia nulla: infatti l'equazione della domanda di x non contiene affatto il prezzo di y. I due beni in oggetto sono dunque BENI INDIPENDENTI.
Dunque, poiché

$$\frac{dx}{dp_y} = 0$$

l'elasticità incrociata è uguale a zero in ogni punto della curva di domanda.

<u>Esercizio 4</u> [tratto dall'esame di microeconomia del prof. Zamagni del 11/1/99]

Le preferenze di un consumatore sono determinate dalla funzione di utilità

$$U(x, y) = x^{1/2} \cdot y^{1/2}$$

a) Si determini la scelta ottimale del consumatore quando p_x=2, p_y=1 e R=1000.
b) Si determini il nuovo paniere ottimale quando il prezzo del bene *y* aumenta a p_y=5.
c) Si derivino gli effetti di reddito e di sostituzione per il bene *y*.
d) Si indichi quale relazione sussiste tra i beni *x* e *y*.

<u>Soluzione</u>

a) Per determinare l'ottimo del consumatore occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2 \\ 1000 = 2x + y \end{cases}$$

Dove $MRS_{y,x} = \dfrac{U'_x}{U'_y} = \dfrac{y}{x}$.

Sostituendo *y=2x* nella seconda, otteniamo:

$$\begin{cases} x^* = 250 \\ y^* = 500 \end{cases}$$

che è l'ottimo del consumatore dati i prezzi correnti (punto E).

b) Se il prezzo del bene *y* passa da 1 a 5, il nuovo ottimo del consumatore si ricava dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{5} \\ 1000 = 2x + 5y \end{cases}$$

Dal quale si ricava

$$\begin{cases} x^* = 250 \\ y^* = 100 \end{cases}$$

che è il nuovo punto di equilibrio E'.

c) L'effetto prezzo, ovvero l'effetto della variazione del prezzo di *y* sulla quantità domandata del bene y stesso, è quindi

$$\frac{\Delta y}{\Delta p_y} = \frac{500-100}{1-5} = -100 < 0$$

Quindi l'effetto prezzo è negativo: all'aumentare del prezzo, la quantità domandata di *y* diminuisce. Tale bene rispetta quindi la legge di domanda.
Vogliamo scomporre l'effetto prezzo totale in effetto sostituzione ed effetto reddito, in modo da distinguere quanta parte della variazione della quantità domandata è dovuta esclusivamente alla variazione dei prezzi relativi e quanto invece è dovuto al fatto che il reddito reale del consumatore è diminuito a seguito dell'aumento del prezzo.
Per fare ciò, immaginiamo di dare all'individuo, successivamente all'aumento del prezzo di *y*, una compensazione di reddito tale da consentirgli di raggiungere lo stesso livello di utilità che raggiungeva nel punto E (prima dell'aumento). Occorre dunque calcolare le coordinate del punto E_c, cioè del punto di tangenza tra la curva di indifferenza passante per E e il vincolo di bilancio fittizio con pendenza pari al nuovo rapporto tra i prezzi.
Per trovare il punto E_c dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} U(E_c) = U(E) \\ MRS_{y,x} = \dfrac{p_x}{p'_y} \end{cases}$$

La prima equazione esprime il fatto che il livello di utilità associato a E_c deve essere lo stesso di quello associato ad E; la seconda condizione stabilisce che la curva di indifferenza passante per E_c sia tangente al vincolo di bilancio fittizio la cui pendenza è pari al nuovo rapporto tra i prezzi.
Calcoliamo innanzitutto il valore dell'utilità nel punto E

$$U(E) = \sqrt{500 \cdot 250} = \sqrt{125000}$$

Quindi il sistema da risolvere per determinare il punto E_c diviene:

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{125000} \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Dalla prima equazione (elevano entrambi i membri alla seconda) si ricava

$$y = \frac{125000}{x}$$

e, sostituendo nella seconda:

$$\frac{\frac{125000}{x}}{x} = \frac{2}{5}$$

Da questa si ricava

x=559

e per sostituzione

y=224

Le coordinate del punto E_c sono quindi E_c=(559,224).
Possiamo ora scomporre l'effetto prezzo in effetto reddito ed effetto sostituzione.

1) <u>Effetto sostituzione</u>

L'effetto sostituzione misura l'effetto sulla quantità domandata derivante dal fatto che a seguito dell'aumento del prezzo di y è cambiato il prezzo relativo dei due beni.
L'effetto sostituzione si misura nel passaggio da E ad E_c:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta p_y}\right)_{U=U(E)} = \frac{y(E)-y(E_c)}{p_y(E)-p_y(E_c)} = \frac{500-224}{1-5} = -\frac{276}{4} < 0$$

Se quindi, a seguito dell'aumento del prezzo di y il consumatore viene compensato in modo da mantenere inalterato il livello di utilità, la variazione della quantità domandata di y sarà negativa: aumentando il prezzo relativo di y, il consumatore sarà portato a diminuire la sua domanda per tale bene, poiché è diventato relativamente più costoso rispetto al bene x.

2) Effetto reddito
L'effetto reddito di una variazione di prezzo misura come varia la quantità domandata di y a seguito esclusivamente della diminuzione del reddito reale a disposizione del consumatore (a parità di prezzi relativi). L'effetto reddito è quindi misurato dal passaggio da E_c ad E'.
Vediamo innanzitutto come cambia la quantità domandata al variare del reddito. Il reddito necessario all'individuo per acquistare il paniere E_c ai nuovi prezzi è

$$R(E_c) = 2\cdot 559 + 5\cdot 224 = 2238$$

Quindi la compensazione necessaria a consentire al consumatore di raggiungere lo stesso livello di utilità precedente all'aumento dei prezzi sarà

$$R(E_c) - R(E) = 1238$$

Nel caso di un aumento di prezzo, la compensazione necessaria a fare restare il consumatore sulla stessa curva di indifferenza deve essere positiva, perché il suo reddito reale diminuisce.
Vediamo come cambia la quantità domandata nel passaggio da E_c a E' (a seguito cioè di una diminuzione del reddito reale):

$$\frac{\Delta y}{\Delta R} = \frac{y(E_c)-y(E')}{R(E_c)-R(E')} = \frac{224-100}{1238} > 0$$

Ciò significa che al diminuire del reddito reale il consumo del bene diminuisce: quindi il bene y è un bene NORMALE.
In termini di effetto reddito della variazione di prezzo, questo significa che all'aumentare del prezzo di y il reddito reale diminuisce e, poiché il bene è un bene normale, anche la quantità domandata diminuisce. Quindi in questo caso l'effetto reddito ha segno negativo (se p_y aumenta, considerando esclusivamente la diminuzione di reddito reale che questo aumento comporta, si avrà una diminuzione della quantità domandata del bene y).
Poiché l'effetto sostituzione e l'effetto reddito in questo caso hanno segno concorde, negativo per entrambi, l'effetto prezzo derivante dalla somma dei due effetti sarà negativo: all'aumentare del prezzo di y, la quantità domandata di y diminuisce, sia perché è aumentato il prezzo relativo di questo bene, sia perché è diminuito il reddito reale a disposizione del consumatore.

d) Poiché all'aumentare del prezzo di y il consumo del bene x non varia (resta 250 in entrambi gli equilibri), i due beni sono indipendenti.

Esercizio 5: Scelte di consumo [da una prova parziale del 15/12/1998]

Un consumatore ha a disposizione un reddito pari a $R = 320$ e preferenze descritte dalla funzione di utilità $U(x, y) = xy$.

a) Determinare il paniere di consumo ottimale in corrispondenza dei prezzi $p_x = 2$ e $p_y = 5$.
b) Si supponga che il prezzo p_y diminuisca, così che ora $p'_y = 4$. Mostrare analiticamente come varia la scelta del consumatore, distinguendo tra effetto reddito ed effetto sostituzione. Di che tipo di beni si tratta? Quanto si dovrebbe trasferire al consumatore per compensarlo dell'aumento di prezzo?

<u>Soluzione</u>

a) Per determinare l'ottimo del consumatore occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{5} \\ 320 = 2x + 5y \end{cases}$$

dove $SMS_{y,x} = \dfrac{U'_x}{U'_y} = \dfrac{y}{x}$. Sostituendo $y = \dfrac{2}{5}x$ nella seconda, otteniamo:

$$\begin{cases} x^* = 80 \\ y^* = 32 \end{cases}$$

che è l'ottimo del consumatore dati i prezzi correnti (punto *E*).

b) Se il prezzo del bene *y* passa da 5 a 4, il nuovo ottimo del consumatore si ricava dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{4} \\ 320 = 2x + 4y \end{cases}$$

Dal quale si ricava

$$\begin{cases} x^{*\prime} = 80 \\ y^{*\prime} = 40 \end{cases}$$

che è il nuovo punto di equilibrio *E'*.
L'effetto prezzo, ovvero l'effetto della variazione del prezzo di *y* sulla quantità domandata dei due beni è rispettivamente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p_y} = \frac{x^{*\prime} - x^*}{p'_y - p_y} = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta p_y} = \frac{y^{*\prime} - y^*}{p'_y - p_y} = -8$$

Quindi l'effetto prezzo è nullo per il bene *x*: al variare del prezzo di *y* il consumo di *x* non cambia (BENI INDIPENDENTI)
Per il bene *y* invece l'effetto è negativo: all'aumentare del prezzo, la quantità domandata di *y* diminuisce. Tale bene rispetta quindi la legge di domanda.
Vogliamo scomporre l'effetto prezzo totale in effetto sostituzione ed effetto reddito, in modo da distinguere quanta parte della variazione della quantità domandata è dovuta esclusivamente alla variazione dei prezzi relativi e quanto invece è dovuto al fatto che il reddito reale del consumatore è aumentato a seguito della diminuzione del prezzo.
Per fare ciò, immaginiamo di dare all'individuo, successivamente alla diminuzione del prezzo di *y*, una compensazione di reddito (negativa) tale da lasciare invariata la sua utilità rispetto al

punto E (prima dell'aumento). Occorre dunque calcolare le coordinate del punto E_c, cioè del punto di tangenza tra la curva di indifferenza passante per E e il vincolo di bilancio fittizio con pendenza pari al nuovo rapporto tra i prezzi.
Per trovare il punto E_c dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} U(E_c) = U(E) \\ SMS_{y,x} = \dfrac{p_x}{p'_y} \end{cases}$$

La prima equazione esprime il fatto che il livello di utilità associato a E_c deve essere lo stesso di quello associato ad E; la seconda condizione stabilisce che la curva di indifferenza passante per E_c sia tangente al vincolo di bilancio fittizio la cui pendenza è pari al nuovo rapporto tra i prezzi.
Calcoliamo innanzitutto il valore dell'utilità nel punto E

$$U(E) = 80 \cdot 32 = 2560$$

Quindi il sistema da risolvere per determinare il punto E_c diviene:

$$\begin{cases} 2560 = xy \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$y = \frac{1}{2}x$$

e, sostituendo nella prima, dopo semplici passaggi, si ottiene $x = 71{,}55$ e dalla seconda $y = 35{,}78$, che sono le coordinate del punto E_c.
Possiamo ora scomporre l'effetto prezzo in effetto reddito ed effetto sostituzione.
1) <u>Effetto sostituzione</u>
L'effetto sostituzione misura l'effetto sulla quantità domandata derivante dal fatto che a seguito della diminuzione del prezzo di *y* è cambiato il prezzo relativo dei due beni.
L'effetto sostituzione si misura nel passaggio da E ad E_c:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta p_y}\right)_{comp} = \frac{y(E) - y(E_c)}{p_y(E) - p_y(E_c)} = \frac{32 - 35{,}78}{5 - 4} < 0$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta p_y}\right)_{comp} = \frac{x(E) - x(E_c)}{p_y(E) - p_y(E_c)} = \frac{80 - 71{,}55}{5 - 4} > 0$$

Se quindi a seguito della diminuzione del prezzo di y il consumatore viene compensato in modo da mantenere inalterato il livello di utilità, la variazione della quantità domandata di *y* sarà positiva: diminuendo il prezzo relativo di *y*, il consumatore sarà portato ad aumentare la sua domanda per tale bene, poiché è diventato relativamente meno costoso rispetto al bene *x*.
Per quanto riguarda il bene *x* invece l'effetto sostituzione è positivo: *a parità di utilità*, al diminuire del prezzo di *y* diminuisce la quantità domandata del bene *x*. Si dice che i beni sono SOSTITUTI NETTI.

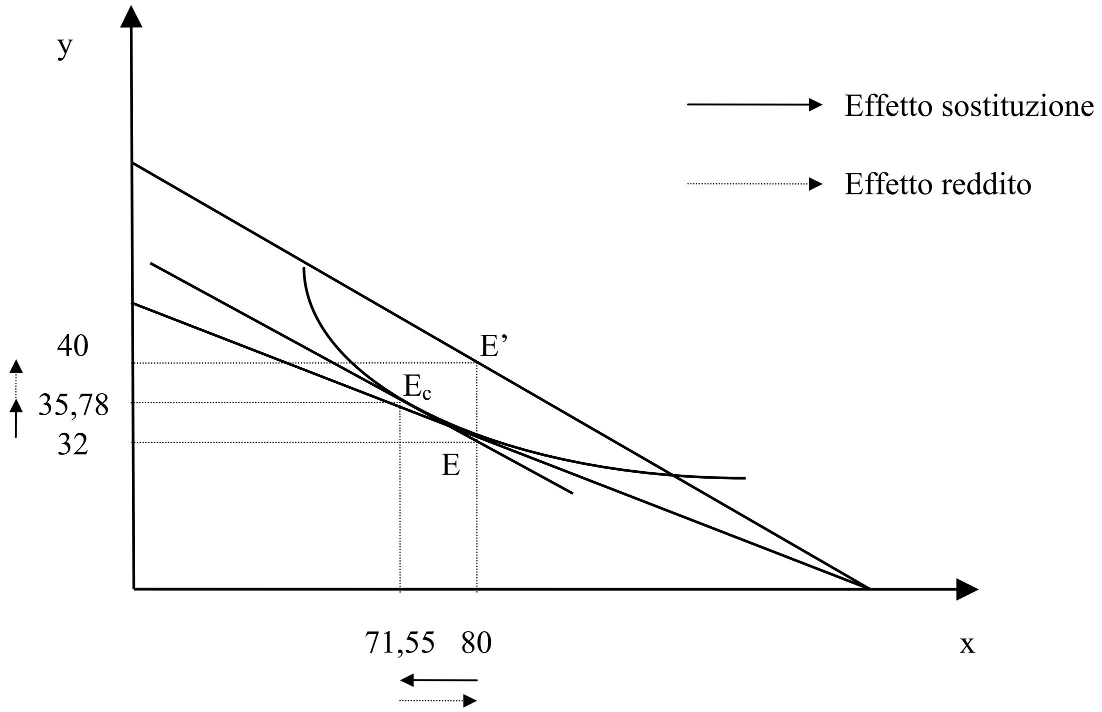
2) <u>Effetto reddito</u>
L'effetto reddito di una variazione di prezzo misura come varia la quantità domandata di *y* a seguito esclusivamente dell'aumento del reddito reale a disposizione del consumatore (a parità di prezzi relativi). L'effetto reddito è quindi misurato dal passaggio da E_c ad E'.

Vediamo innanzitutto come cambia la quantità domandata al variare del reddito. Nel passaggio da E_c a E' la variazione della quantità domandata di ciascuno dei due beni è:

$$\Delta x = x(E_c) - x(E') = 71{,}55 - 80 < 0$$

$$\Delta y = y(E_c) - y(E') = 35{,}78 - 40 < 0$$

Ciò significa che all'aumentare del reddito reale (da E_c ad E') il consumo di ciascuno dei due beni aumenta: quindi tali beni sono NORMALI.
Quindi nel passaggio da E_c ad E' (effetto reddito) la quantità domandata aumenta per entrambi i beni.
In termini di effetto reddito della variazione di prezzo, questo significa che al diminuire del prezzo di y il reddito reale aumenta e, poiché il bene è un bene normale, anche la quantità domandata aumenta. Quindi in questo caso l'effetto reddito ha segno negativo (se p_y diminuisce, considerando esclusivamente la diminuzione di reddito reale che questa diminuzione comporta, si avrà un aumento della quantità domandata del bene y).
Poiché l'effetto sostituzione e l'effetto reddito in questo caso hanno segno concorde, negativo per entrambi, l'effetto prezzo derivante dalla somma dei due effetti sarà negativo: al diminuire del prezzo di y, la quantità domandata di y aumenta, sia perché è diminuito il prezzo relativo di questo bene, sia perché è aumentato il reddito reale a disposizione del consumatore.
Graficamente:



Esercizio 6: La combinazione efficiente dei fattori produttivi (minimizzazione del costo di produzione)

La tecnologia di un'impresa è caratterizzata dalla seguente funzione di produzione:

$$q = 3x_1^{3/4}x_2$$

a) calcolare i rendimenti di scala;
b) dati i prezzi dei fattori $\omega_1 = 3$ e $\omega_2 = 4$, calcolare la combinazione dei fattori che consente di ottenere un livello di produzione $q=6$ al minimo costo di produzione;
c) determinare come cambia la combinazione efficiente dei fattori quando il prezzo del fattore x_1 raddoppia;
d) determinare come cambia la combinazione ottimale dei fattori se l'impresa vuole raddoppiare la produzione (ai prezzi dei fattori iniziali);
e) determinare la domanda di ciascun fattore in funzione dell'output;
f) determinare la curva dei costi totali di lungo periodo;
g) determinare la curva dei costi totali di breve periodo quando la disponibilità fissa del fattore x_2 è pari a 1.

Soluzione

a) Per calcolare i rendimenti di scala, moltiplichiamo ciascun fattore produttivo per λ nella funzione di produzione:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 3\lambda^{3/4}x_1^{3/4}\lambda x_2 = \lambda^{7/4}q$$

Quindi questa funzione ha rendimenti di scala crescenti.

b) La combinazione ottimale dei fattori che consente di produrre una quantità di output pari a 6 è determinata nel punto di tangenza tra l'isoquanto corrispondente alla quantità di 6 e la retta di isocosto più bassa possibile (corrispondente alla spesa per i fattori più bassa possibile). Quindi occorre porre a sistema un'equazione che impone la tangenza tra isoquanto e isocosto e un'altra equazione che assicura che tale tangenza avvenga in corrispondenza dell'isoquanto $\bar{q} = 6$:

$$\begin{cases} MRTS_{1,2} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

La prima equazione impone l'uguaglianza tra pendenza dell'isoquanto (rappresentata dal saggio marginale di sostituzione tecnica) e pendenza dell'isocosto (pari al rapporto tra i prezzi di mercato dei fattori).
Il saggio marginale di sostituzione tecnica tra i fattori è dato dal rapporto tra produttività marginale del fattore x_1 e rapporto tra produttività marginale del fattore x_2, ovvero:

$$MRTS_{1,2} = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{3\frac{3}{4}x_1^{\frac{3}{4}-1}x_2}{3x_1^{3/4}} = \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1}$$

Il sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{3}{4} \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_1 \end{cases}$$

Sostituendo dalla prima equazione nella seconda, si ottiene che la combinazione economicamente efficiente dei fattori è:

$$E = \begin{cases} x_1{*} = 2^{4/7} \\ x_2{*} = 2^{4/7} \end{cases}$$

c) Se il prezzo del fattore x_1 raddoppia, il sistema da impostare è:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{6}{4} \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene che la nuova combinazione efficiente dei fattori è:

$$E' = \begin{cases} x_1{*} = 1 \\ x_2{*} = 2 \end{cases}$$

d) Per determinare la combinazione ottimale dei fattori che consente di ottenere la quantità di produzione pari a 12 ai prezzi dei fattori iniziali, occorre impostare il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ 12 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

che dà soluzione

$$E'' = \begin{cases} x_1{}^* = 2^{8/7} \\ x_2{}^* = 2^{8/7} \end{cases}$$

e) Per determinare la domanda dei fattori al variare della quantità di produzione che l'impresa desidera ottenere occorre impostare il sistema iniziale senza specificare un determinato livello di produzione ma indicando la quantità prodotta con un generico q, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ q = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

da cui si ottengono le domande dei fattori in funzione della quantità prodotta:

$$x_1 = x_2 = \left(\frac{q}{3}\right)^{4/7}$$

f) Per ricavare la curva dei costi totali di lungo periodo utilizziamo le funzioni di domanda degli input in funzione dell'output, e quindi la funzione di costo di lungo periodo per questa impresa è:

$$CT_L = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 =$$
$$= 3\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} + 4\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} = 7\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7}$$

A questa funzione di costo totale corrisponde una funzione di costo medio pari a:

$$AC_L = \frac{7}{3^{4/7}}q^{\frac{4}{7}-1} =$$
$$= \frac{7}{3^{4/7}}q^{-\frac{3}{7}}$$

e una funzione di costo marginale pari a:

$$MC_L = \frac{7}{3^{4/7}}\frac{4}{7}q^{\frac{4}{7}-1} =$$
$$= \frac{4}{3^{4/7}}q^{\frac{4}{7}-1} =$$
$$= \frac{4}{3^{4/7}}q^{-\frac{3}{7}}$$

Si noti che la funzione di costo medio di lungo periodo è decrescente (infatti la derivata prima del costo medio rispetto alla quantità prodotta è $\frac{dAC_L}{dq} = \frac{7}{3^{4/7}}\left(-\frac{3}{7}\right)q^{-10/7} < 0$), infatti la funzione di produzione presenta rendimenti di scala crescenti.

g) Quando la quantità dell'input x_2 è fissa e pari a 1 (breve periodo), la funzione di produzione per l'impresa è:

$$q = 3x_1^{3/4}\overline{x_2} = 3x_1^{3/4} \cdot 1 = 3x_1^{3/4}$$

per cui la domanda per il fattore x_1 in funzione del livello di produzione è:

$$x_1 = \left(\frac{q}{3}\right)^{4/3}$$

Quindi la funzione di costo di breve periodo per l'impresa è:

$$CT_B = 3\left(\frac{q}{3}\right)^{4/3}$$

Si noti che questa espressione rappresenta il costo economico per l'impresa, mentre in realtà l'impresa sostiene anche un costo contabile per il fattore fisso, che non rientra tuttavia nel novero dei costi economici in quanto, poiché il fattore fisso non ha un utilizzo alternativo nel breve periodo, non rappresenta un costo opportunità per l'impresa.

Esercizio 7: La perdita di benessere del monopolio

Consideriamo un'impresa monopolista che fronteggia una domanda di mercato pari a:

$$Q^D = 40 - p$$

e opera con una tecnologia rappresentata dalla seguente funzione di costo totale:

$$C(Q) = 20Q$$

Determinare:
a) la scelta ottimale del monopolista;
b) la perdita di benessere relativa alla situazione di concorrenza perfetta.

Soluzione

a) L'impresa monopolista, come ogni altra impresa che massimizza il profitto, segue due regole per determinare il volume di produzione ottimale:
   i) regola del profitto marginale: se l'impresa non cessa l'attività, sceglierà quel livello di produzione che massimizza i profitti, ovvero in corrispondenza del quale il ricavo marginale è uguale al costo marginale. I profitti dell'impresa sono:
   $$\Pi(Q) = p(Q)Q - C(Q)$$
   La condizione per la massimizzazione dei profitti richiede di porre uguale a zero la derivata prima di tale funzione rispetto a Q. Si noti che, poiché l'impresa monopolista è in grado di fare il prezzo, il prezzo di mercato è funzione della quantità prodotta e quindi il ricavo marginale è diverso dal prezzo (nel caso dell'impresa che non fa il prezzo, invece, il prezzo era appunto un dato per l'impresa e quindi il ricavo marginale era sempre pari al prezzo). La condizione di massimizzazione dei profitti è quindi:
   $$\frac{dp(Q)}{dQ}Q + p(Q) - \frac{dC(Q)}{dQ} = 0$$
   Ovvero ricavo marginale (R') = costo marginale (C').
   ii) regola per la cessazione dell'attività: l'impresa deciderà di cessare l'attività se il ricavo medio è inferiore al costo medio.

Con riferimento all'esercizio in questione, per determinare l'equilibrio del monopolista occorre calcolare il costo marginale e il ricavo marginale. Il costo marginale è costante e pari a 20.

Il ricavo totale è

$$R = p(Q)Q = (40 - Q)Q$$

Quindi il ricavo marginale è:

$$R' = \frac{dR}{dQ} = 40 - 2Q$$

Si noti che la curva del ricavo marginale ha pendenza doppia rispetto alla curva di domanda inversa: questa è una regola che vale in generale per tutte le funzioni di domanda lineari.
Per determinare la quantità ottimale prodotta dal monopolista uguagliamo il ricavo marginale al costo marginale:

$$40 - 2Q = 20$$

Da cui si ottiene $Q_M{}^* = 10$ e, sostituendo tale quantità nella curva di domanda, $p_M{}^* = 30$.
Si può verificare che la regola per la cessazione dell'attività in questo caso prevede che l'impresa debba continuare a produrre: infatti il ricavo medio (cioè il prezzo) è superiore al costo medio:

$$RM \geq CM$$

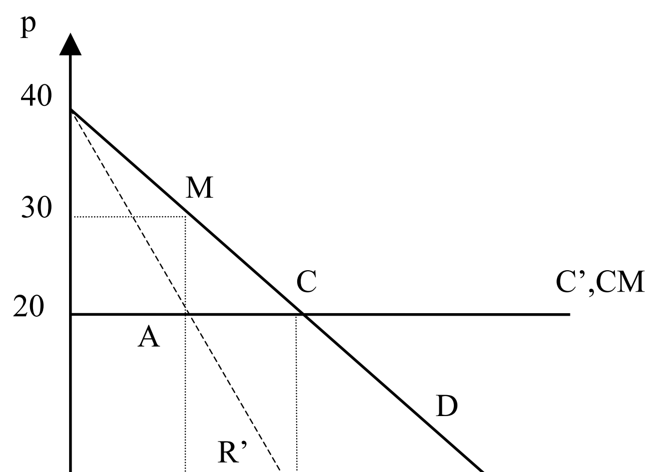
$$30 \geq 20$$

b) Confrontando questa situazione con quella di concorrenza perfetta, è possibile verificare che il monopolio comporta una perdita netta di surplus totale. L'equilibrio di concorrenza perfetta si determina ponendo la condizione:

$$p = C'$$

$$p_C{}^* = 20$$

E, sostituendo nella curva di domanda, $Q_C{}^* = 20$.
Rappresentiamo graficamente l'equilibrio di monopolio (punto M) e quello di concorrenza perfetta (punto C):



Calcoliamo il surplus del produttore e del consumatore nelle due situazioni e poniamoli a confronto.

Concorrenza perfetta

Surplus del consumatore = $\dfrac{(40-20)\cdot 20}{2} = 200$

Surplus del produttore = 0 (poiché la curva di costo medio e la curva di costo marginale coincidono, p=C'=CM e quindi i profitti sono nulli).

Monopolio

Surplus del consumatore = $\dfrac{(40-30)\cdot 10}{2} = 50$

Surplus del produttore = $(30-20)\cdot 10 = 100$

Quindi il surplus totale è pari a 200 in concorrenza perfetta e a 150 in monopolio: la perdita di surplus è pari a 50 (area triangolo AMC).