14. Effetto reddito ed effetto sostituzione

Esempio
Le preferenze di un consumatore sono descritte dalla funzione di utilità $U = x_1x_2$. Il suo reddito è pari a 400 con $p_1 = 4$ e $p_2 = 10$.

a) Determinare la scelta ottima e come varia la scelta se p_1 diminuisce da 4 e 2 mentre restano invariati il reddito e il prezzo di x_2.

b) Scomporre, quindi, la variazione intervenuta nelle domande ottimali dei due beni a seguito della variazione del prezzo p_1, in effetto di sostituzione ed effetto di reddito utilizzando il metodo della variazione di costo di Slutsky

Soluzione
a) Al solito, partiamo dalla condizione di ottimo:

$$\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| = \frac{MUx_1}{MUx_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Calcoliamo per prima l'ottimo iniziale.
Data la funzione di utilità da massimizzare

$$U(x_1,x_2) = x_1x_2$$

e il vincolo di bilancio

$$400 = 4\,x_1 + 10\,x_2$$

ne segue che:

$$\frac{\delta U}{\delta x_1} = x_2$$

$$\frac{\delta U}{\delta x_2} = x_1$$

L'uguaglianza tra la pendenza della curva di indifferenza e la pendenza della retta di bilancio si ha quando:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{10} \Rightarrow x_2 = 0{,}4\,x_1$$

Per sostituzione nell'equazione del vincolo di bilancio si ottiene:

$$\begin{aligned} 400 &= 4x_1 + 10\,(0{,}4)\,x_1 \\ &= 4x_1 + 4\,x_1 \Rightarrow x_1 = 50 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = 1000$$

$$x_2 = 0{,}4\ (50) = 20$$

La scelta ottima corrispondente ai prezzi $p_1 = 4$ e $p_2 = 10$ è rappresentata da $x_1 = 50$ e $x_2 = 20$.

Calcoliamo, ora, la scelta ottima finale.
Il nuovo vincolo di bilancio è:

$$400 = 2\ x_1 + 10\ x_2$$

La condizione di ottimo diviene,quindi:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \ x_2 = 0{,}2\ x_1$$

e, per sostituzione nell'equazione del vincolo di bilancio, avremo:

$$x_1 = 100$$
$$\Rightarrow U = 2000$$
$$x_2 = 20$$

Dal periodo iniziale a quello finale, pertanto, il bene x_1 registra un incremento di 50.

c) Scomposizione dell'effetto di reddito e dell'effetto di sostituzione col metodo di **Slutsky** o della differenza di costo.

Con i prezzi del periodo finale $p_1 = 2$ e $p_2 = 10$ il consumatore avrebbe potuto accedere all'iniziale paniere di beni (50, 20) spendendo meno di 400 dato che x_1 nel periodo iniziale costava il doppio.
Più precisamente, il costo del paniere sarebbe stato:

$$2\ (50) + 10\ (20) = 300$$

Il consumatore avrebbe economizzato 100 rispetto alla spesa iniziale di 400.
Supponiamo che lo stato prelevi con un'imposta questo risparmio realizzato per neutralizzare l'effetto-reddito.
Nel caso di un aumento del prezzo di $x_{1,}$ al contrario, il consumatore sarebbe stato "compensato" con una variazione di reddito per il perduto potere d'acquisto e messo quindi in grado di accedere, ai nuovi prezzi, al paniere iniziale.
Con una spesa di 300, tuttavia, il consumatore non solo avrebbe potuto scegliere come minimo la combinazione iniziale ma avrebbe potuto accedere ad una combinazione migliore considerando che con il nuovo rapporto tra i prezzi $p_1/p_2 = 2/10$ anziché $p_1/p_2 = 4/10$, il bene x_1 sarebbe stato relativamente più conveniente .
Ricordando che, ai nuovi prezzi, la condizione di massimo è:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \ x_2 = 0{,}2\ x_1$$

e che il vincolo di bilancio è:

$$300 = 2\,x_1 + 10\,x_2$$

per sostituzione del valore di x_2 nell'equazione del vincolo si ottiene l'ottimo per:

$$\begin{array}{l} x_1 = 75 \\ \Rightarrow U = 1125 \\ x_2 = 15 \end{array}$$

L'ottimo intermedio è rappresentato, quindi, dal paniere $(x_1, x_2) = (75,15)$.
Il reddito del consumatore è, tuttavia, 400 e non 300 per cui la sua scelta ottima finale, come abbiamo già visto, è rappresentata da:

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = 20$$

Tra il periodo iniziale e quello finale, pertanto, la domanda del bene x_1 passa da 50 a 100 con un incremento di 50. Questo incremento è dovuto in parte al fatto che al variare del rapporto tra i prezzi è diventato più conveniente domandare il bene x_1. In parte, poi, l'incremento di domanda è dovuto al fatto che, rispetto alla scelta intermedia, è come se fosse aumentato da 300 a 400 il reddito del consumatore.
La maggior quantità di x_1 domandata tra il periodo intermedio e quello iniziale (75 – 50 = 25) è dovuta ad effetto di sostituzione. La restante differenza tra domanda del periodo finale e quella del periodo intermedio (100 – 75 = 25) è dovuta ad effetto di reddito. L'effetto totale è la somma dei due effetti ed è pari a 50.
Per il bene x_2 l'effetto di sostituzione è pari a – 5 mentre quello di reddito è 5 per cui l'effetto totale è uguale a zero. Ed, infatti, tra il periodo iniziale e quello finale la sua domanda non subisce variazioni.

NOTA: Data una **funzione** di utilità **Cobb-Douglas** $U(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ soggetta al vincolo $R = p_1x_1 + p_2x_2$, si dimostra che la domanda di x_1 e quella di x_2
risultano essere rispettivamente:

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{R}{p_1}$$

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{R}{p_2}$$

Al riguardo, (1) scriviamo la condizione del paniere di equilibrio di x_1 e x_2, (2) esplicitiamo per x_2 l'equazione del vincolo di bilancio,(3) sostituiamo la seconda equazione nella prima e risolviamo. Peraltro, il rapporto tra le utilità marginali MU_1/MU_2 è uguale a $\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$ ovvero è uguale al rapporto tra gli esponenti di x_1 e x_2 per il rapporto inverso tra x_2 e x_2 (Per la dimostrazione, vedi il cap. sulla combinazione ottima dei fattori). Pertanto:

(1) $$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

(2) $$x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

(3) $$\frac{\alpha\left(\frac{R}{p_1} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \alpha\left(\frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right) p_2 = \beta x_1 p_1$$

Dopo opportune trasformazioni otteniamo:

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{R}{p_1}$$

Per trovare la domanda di x_2 sostituiamo x_1 nell'equazione del vincolo di bilancio:

$$x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{R}{p_1}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{R}{p_2}$$

Nel caso dell'esercizio sopra svolto, dati la funzione di utilità $U(x_1,x_2) = x_1 x_2$ e il vincolo di bilancio $400 = 4x_1 + 10x_2$, possiamo, pertanto, facilmente verificare che:

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{400}{4} = 50$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{400}{10} = 20$$

Si può anche osservare come nel caso Cobb-Douglas la spesa totale per un bene (ovvero p_1x_1 e p_2x_2) sia uguale a una quota costante del reddito R.

$$p_1x_1 = 200$$

$$p_2x_2 = 200$$

Se tale spesa è una quota costante del reddito, restando invariato il reddito, resta costante anche la spesa. Ed infatti, quando a seguito della diminuzione del prezzo di x_1 da 4 a 2, la scelta ottima diviene (100,20), la spesa per x_1 è pari a 100.2 = 200 e quella per l'acquisto di x_2 è pari a 20.10 =200.

Altra conseguenza è che, se al variare del prezzo di un bene la spesa per quel bene non varia, l'elasticità della domanda al prezzo è unitaria.

Analiticamente, ponendo uguale a zero la derivata della spesa rispetto al prezzo, si ha:

$$\frac{d(p_1 x_1)}{dp_1} = 0 \Rightarrow x_1 + p_1 \frac{dx_1}{dp_1} = 0 \Rightarrow x_1 = -p_1 \frac{dx_1}{dp_1} \Rightarrow -\frac{dx_1}{dp_1}\frac{p_1}{x_1} = 1$$

METODO della variazione compensativa, proposto da Hicks:

Un altro metodo per la separazione dell'effetto di reddito e dell'effetto di sostituzione è quello detto della variazione compensativa del reddito.
In questo caso interessa capire , a variazione di prezzo intervenuta, quale ammontare di reddito si dovrebbe dare o sottrarre al consumatore per "compensarlo" della variazione del suo potere d'acquisto e consentirgli, quindi, di conservare il primitivo livello di utilità totale, ovvero di restare sulla originaria curva di indifferenza.
Richiamiamo i dati dell'esempio precedente:
La funzione di utilità da massimizzare è:

$$U(x_1,x_2) = x_1 x_2$$

con il vincolo di bilancio

$$400 = 4\,x_1 + 10\,x_2$$

L'ottimo iniziale si raggiunge quando:

$$x_1 = 500$$
$$\Rightarrow U = 1000$$
$$x_2 = 20$$

e quello finale quando:

$$x_1 = 100$$
$$\Rightarrow U = 2000$$
$$x_2 = 20$$

Ora, l'ipotesi è che ai nuovi prezzi $p_1 = 2$ e $p_2 = 10$ la variazione simultanea del reddito consenta al consumatore di mantenere l'utilità totale iniziale $U = 1000 = x_1x_2$.
Data la riduzione del prezzo di x_1, e il nuovo rapporto tra i prezzi, quel livello di utilità avrebbe potuto essere conservato utilizzando un minor ammontare di reddito. L'equilibrio intermedio (teorico), pertanto, è definito dal punto di tangenza tra la curva di indifferenza iniziale e una retta di bilancio più bassa ma parallela alla retta di bilancio finale. Sia per la retta finale che per quella intermedia la pendenza , infatti, è misurata dallo stesso rapporto tra i prezzi.
Se

$$U = 1000 = x_1x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{1000}{x_1}$$

è l'equazione dell'iperbole equilatera che costituisce la curva di indifferenza su cui si situa l'ottimo iniziale.
Per ottenere l'ottimo intermedio è sufficiente uguagliare la pendenza del vincolo di bilancio misurata dal nuovo rapporto tra i prezzi e la derivata della curva di indifferenza.
Se

$$x_2 = \frac{1000}{x_1}$$

$$x_2' = -\frac{1000}{x_1^{\,2}}$$

Se

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

la condizione di equilibrio intermedia è:

$$-\frac{1000}{x_1^{\,2}} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \quad x_1^2 = 5000$$

$$x_1 = \sqrt{5000} = 70{,}7$$

$$x_2 = \frac{1000}{x_1} \qquad \Rightarrow U = 1000$$

$$x_2 = \frac{1000}{70{,}7} = 14{,}1$$

Il paniere $x_1 = 70{,}7$, $x_2 = 14{,}1$ consente, quindi, al consumatore di restare sulla curva di indifferenza iniziale.
È possibile calcolare il reddito teorico necessario per mettere in evidenza l'effetto di sostituzione:

$$2\,(70{,}7) + 10\,(14{,}1) = 282{,}5$$

L'equazione della retta di bilancio intermedia è, pertanto,

$$282{,}5 = 2x_1 + 10\,x_2$$

da cui:

$$x_2 = \frac{282{,}5}{10} - \frac{2}{10}x_1 \Rightarrow x_2 = 28{,}25 - \frac{1}{5}x_1$$

che ha intercetta più bassa della retta di bilancio finale ma pendenza uguale.
Infatti, per un reddito di 400 e non di 282,5 e $p_1 = 2$ e $p_2 = 10$, il vincolo di bilancio è:

$$400 = 2x_1 + 10x_2$$

e

$$x_2 = 40 - \frac{1}{5}x_1$$

Il passaggio da 50 a 70,7 di x_1 pari a 20,7 misura, pertanto, l'effetto di sostituzione. È infatti la maggiore domanda dovuta al più conveniente rapporto tra i prezzi dopo la riduzione del prezzo di x_1. La parte della variazione totale da attribuire all'effetto di reddito è pari a 29,3.