Microeconomia - Problem set 2 - soluzione

(Prof. Paolo Giordani - TA: Pierluigi Murro)

16 Aprile 2015

Esercizio 1.

Le preferenze di un consumatore sono descritte dal saggio marginale di sostituzione $SMS = 2x_2/3x_1$; le sue dotazioni dei due beni sono $e_1 = 5$ e $e_2 = 10$. I prezzi sono rispettivamente $p_1 = 12$ e $p_2 = 6$. Calcolare le quantità acquistate e vendute dei due beni.

Risposta:
Le scelte di consumo sono identificate dal sistema:

$$\begin{cases} SMS = p_1/p_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2 \end{cases}$$

che nel nostro caso diventa

$$\begin{cases} 2x_2/3x_1 = 2 \\ 12x_1 + 6x_2 = 12(5) + 6(10) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $x_1^* = 4$ e $x_2^* = 12$. Pertanto la domanda netta del bene 1 sarà pari a $(x_1^* - e_1) = -1$ (ovvero il consumatore sceglie di vendere una unità del bene 1), mentre la domanda netta del bene 2 sarà pari a $(x_2^* - e_2) = 2$ (ovvero il consumatore sceglie di acquistare due unità del bene 2).

Esercizio 2.

Si consideri un consumatore con le seguenti utilità marginali $MU_1 = 3x_2$ e $MU_2 = 5x_1$. Le dotazioni iniziali dei due beni sono rispettivamente $e_1 = 30$ e $e_2 = 40$. Sapendo che i prezzi dei due beni sono $p_1 = 12$ e $p_2 = 15$, calcolare le quantità acquistate e vendute dei due beni.

Risposta:

Le scelte di consumo sono identificate dal sistema:

$$\begin{cases} SMS = p_1/p_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2 \end{cases}$$

che nel nostro caso diventa

$$\begin{cases} 3x_2/5x_1 = 12/15 \\ 12x_1 + 15x_2 = 12(30) + 6(40) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $x_1^* = 30$ e $x_2^* = 40$.

Il problema può essere risolto in maniera più immedieta, osservando che dalla condizione di uguaglianza tra SMS e p_1/p_2 si ottiene $x_2/x_1 = 4/3$, che è esattamente pari al rapporto tra le due dotazioni iniziali $e_2/e_1 = 4/3$.

In altri termini le dotazioni iniziali rappresentano l'unico paniere appartenente al vincolo che soddisfa la proporzione ottimale tra i due beni.

Esercizio 3.

Le preferenze sul consumo intertemporale di un agente sono descritte dalla funzione di utilità $U(c_1, c_2) = \log c_1 + \log c_2/(1+\rho)$, dove ρ è il saggio di preferenza intertemporale. Le dotazioni di reddito nei due periodi sono $m_1 = 360$ e $m_2 = 400$. Il tasso d'interesse è $r = 0,1$.

a. Nell'ipotesi $\rho = 0,2$ determinate il consumo ottimale al tempo 1 e al tempo 2. Calcolate anche il risparmio al tempo 1 e 2 (S_1, S_2).

b. Nell'ipotesi $\rho = 0,1$ determinate il consumo ottimale al tempo 1 e al tempo 2. Calcolate anche il risparmio al tempo 1 e 2 $(S_1,\ S_2)$.

c. Nell'ipotesi $\rho = 0$ determinate il consumo ottimale al tempo 1 e al tempo 2. Calcolate anche il risparmio al tempo 1 e 2 $(S_1,\ S_2)$.

Risposta:

In questo caso le curve d'indifferenza dell'agente sono decrescenti e convesse (preferenze regolari) e pertanto la soluzione d'ottimo è identificata dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} SMSI = (1+r) \\ c_1 + c_2/(1+r) = m_1 + m_2/(1+r) \end{cases}$$

dove la prima equazione rappresenta la condizione di uguaglianza tra saggio marginale di sostituzione intertemporale e prezzo relativo del consumo al tempo 1 e al tempo 2, mentre la seconda equazione denota il vincolo di bilancio intertemporale.

Ricordiamo che $SMSI = (1+\rho)\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}$. Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} (1+\rho)\frac{c_2}{c_1} = 1.1 \\ c_1 + \frac{c_2}{1.1} = 360 + \frac{400}{1.1} \end{cases}$$

Vediamo come varia la soluzione ottimale al variare di ρ.

a. $\rho = 0.2$

$$\begin{cases} 1.2\frac{c_2}{c_1} = 1.1 \\ c_1 + \frac{c_2}{1.1} = 360 + \frac{400}{1.1} \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} c_2 = 0.92c_1 \\ c_1 + \frac{0.92c_1}{1.1} = 360 + \frac{400}{1.1} \end{cases}$$

Quindi la scelta ottima è data da: $c_1^* = 393.5$ e $c_2^* = 362$ (valori approssimativi). Come previsto, essendo $\rho > r$, il consumo ottimale del periodo 1 risulta essere maggiore del consumo ottimale del periodo 2.
Il risparmio del primo periodo è uguale a: $S_1 = m_1 - c_1^* = 360 - 393.5 = -33.5$ (essendo il risparmio negativo, il consumatore si sta indebitando per poter consumare una quantità maggiore rispetto al reddito disponibile). In maniera analoga si ricava il risparmio del secondo periodo: $S_2 = m_2 - c_2^* = 400 - 362 = +38$. Si può verificare che $S_2 = -(1+r)S_1$.

b. $\rho = 0.1$
In questo caso $\rho = r$, per cui il consumatore sceglierà di consumare le stesse quantità nei due periodi.

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \\ c_1 + \frac{c_1}{1.1} = 360 + \frac{400}{1.1} \end{cases}$$

Quindi la scelta ottima è data da: $c_1^* = c_2^* = 379$ (valori approssimativi). Il risparmio del primo periodo è uguale a: $S_1 = m_1 - c_1^* = 360 - 379 = -19$. In maniera analoga si ricava il risparmio del secondo periodo: $S_2 = m_2 - c_2^* = 400 - 379 = +21$. Si può verificare che $S_2 = -(1+r)S_1$.

c. $\rho = 0$

$$\begin{cases} c_2 = 1.1c_1 \\ c_1 + \frac{1.1c_1}{1.1} = 360 + \frac{400}{1.1} \end{cases}$$

Quindi la scelta ottima è data da: $c_1^* = 361.8$ e $c_2^* = 398$ (valori approssimativi). Come previsto, essendo $\rho < r$, il consumo ottimale del periodo 1 risulta essere minore del consumo ottimale del periodo 2.
Il risparmio del primo periodo è uguale a $S_1 = m_1 - c_1^* = 360 - 361.8 = -1.8$, mentre il risparmio del secondo periodo è uguale a $S_2 = m_2 - c_2^* = 400 - 398 = +2$ (nota che sebbene $c_1^* < c_2^*$, il consumatore deve comunque indebitarsi, anche se di poco, nel periodo corrente per poter sostenere economicamente la sua scelta ottimale). Si può verificare che $S_2 = -(1+r)S_1$.

Nota che all'aumentare di ρ aumenta il grado di impazienza del consumatore, ovvero il consumo ottimale nel primo periodo aumenta mentre si riduce il consumo ottimale nel futuro.

Esercizio 4.

Rispondere vero o falso e spiegare il perchè.

1. Il vincolo di bilancio intertemporale può essere espresso eguagliando il valore attuale del flusso di consumo nei due periodi con il valore futuro del flusso di reddito nei due periodi.
   Risposta: Falso. Il valore attuale del flusso di consumo nei due periodi deve essere uguale al valore attuale del flusso di reddito nei due periodi.

2. In presenza di un saggio di sconto molto alto, le curve di indifferenza tra consumo corrente e consumo futuro sono asimmetriche e orientate a sinistra.
   Risposta: Falso. Per valori di ρ elevati, il consumatore sconta molto il futuro; ovvero pesa di più il consumo corrente rispetto a quello futuro. Di conseguenza le curve di indifferenza saranno orientate in basso a destra.

3. Nel caso di perfetti sostituti il consumatore preferisce sempre consumare solo nel periodo 2.
   Risposta: Falso. Questo avviene solo quando i consumi sono perfetti sostituti 1 ad 1. Nel caso generale, la scelta tra consumo corrente e consumo futuro dipende dalla relazione tra il saggio marginale di sostituzione intertemporale (pendenza della curva di indifferenza) e il tasso di interesse di mercato $1 + r$ (pendenza del vincolo di bilancio).

4. Se $\rho < r$ il punto di ottimo potrebbe collocarsi in basso a destra della linea di uguale consumo.
   Risposta: Falso. In questo caso il punto di ottimo si colloca a sinistra della linea di uguale consumo ed è caratterizzato da $c_1^* < c_2^*$.

5. Sappiamo che quando $\rho > r$ il punto di ottimo è caratterizzato da $c_1^* > c_2^*$. Questo implica che il consumatore si indebita sempre nel primo periodo, mentre nel secondo periodo dà sempre a prestito.
   Risposta: Falso. L'ammontare di risparmio (debito) dipende dal reddito a disposizione in ciascun periodo.

Esercizio 5.

Le preferenze sul consumo intertemporale di un agente sono descritte dalla funzione di utilità $U(c_1, c_2) = [\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}/(1+\rho)]^{2/3}$, dove ρ è il saggio di preferenza intertemporale. Le dotazioni di reddito nei due periodi sono $m_1 = 800$ e $m_2 = 670$. Il tasso d'interesse è $r = 0,3$.
Risposta:
La funzione di utilità è una trasformazione monotona e pertanto il problema può essere risolto considerando la seguente funzione di utlità intertemporale $U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}/(1+\rho)$. Le curve d'indifferenza dell'agente sono decrescenti e convesse (preferenze regolari) e la soluzione d'ottimo è identificata dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} SMSI = (1+r) \\ c_1 + c_2/(1+r) = m_1 + m_2/(1+r) \end{cases}$$

Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} (1+\rho)\frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1,3 \\ c_1 + \frac{c_2}{1.3} = 800 + \frac{670}{1.3} \end{cases}$$

Vediamo come varia la soluzione ottimale al variare di ρ.

a. $\rho = 0.3$

In questo caso $\rho = r$, per cui il consumatore sceglierà di consumare le stesse quantità nei due periodi.

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \\ c_1 + \frac{c_1}{1.3} = 800 + \frac{670}{1.3} \end{cases}$$

Quindi la scelta ottima è data da: $c_1^* = c_2^* = 743$ (valori approssimativi). Il risparmio del primo periodo è uguale a: $S_1 = m_1 - c_1^* = 800 - 743 = +57$. In maniera analoga si ricava il risparmio del secondo periodo: $S_2 = m_2 - c_2^* = 670 - 743 = -73$. Si può verificare che $S_2 = -(1+r)S_1$.

b. $\rho = 0.5$

$$\begin{cases} 1.5\frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1.3 \\ c_1 + \frac{c_2}{1.3} = 800 + \frac{670}{1.3} \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} c_2 = 0.75c_1 \\ c_1 + \frac{0.75c_1}{1.3} = 800 + \frac{670}{1.3} \end{cases}$$

Quindi la scelta ottima è data da: $c_1^* = 834$ $c_2^* = 625$ (valori approssimativi). Il risparmio del primo periodo è uguale a: $S_1 = m_1 - c_1^* = 800 - 834 = -34$. In maniera analoga si ricava il risparmio del secondo periodo: $S_2 = m_2 - c_2^* = 670 - 625 = +45$. Si può verificare che $S_2 = -(1+r)S_1$.

c. $\rho = 0.1$

$$\begin{cases} 1.1\frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1.3 \\ c_1 + \frac{c_2}{1.3} = 800 + \frac{670}{1.3} \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} c_2 = 1.4c_1 \\ c_1 + \frac{1.4c_1}{1.3} = 800 + \frac{670}{1.3} \end{cases}$$

Quindi la scelta ottima è data da: $c_1^* = 634$ $c_2^* = 887$ (valori approssimativi). Il risparmio del primo periodo è uguale a: $S_1 = m_1 - c_1^* = 800 - 634 = 166$.

In maniera analoga si ricava il risparmio del secondo periodo:

$S_2 = m_2 - c_2^* = 670 - 887 = -217$. Si può verificare che $S_2 = -(1+r)S_1$.