ESERCITAZIONE 5 - soluzioni

Esercizio 1

a) Data la funzione di produzione $q = 12 * x_1 * x_2$ si calcoli l'allocazione ottima (la combinazione di input che minimizza il costo totale) sapendo che l'impresa intende produrre una quantità pari a q=1000 e sapendo che il costo degli input è rispettivamente $p_1 = 10;\ p_2 = 2$.
b) Ottenere il livello di costo minimo corrispondente all'allocazione ottima
c) Rappresentare graficamente la condizione di ottimo dell'impresa

Soluzione

a) L'allocazione ottima è quella in corrispondenza della quale si verifica l'uguaglianza del SMST con il rapporto tra i prezzi degli input produttivi. Pertanto per identificare l'allocazione ottima, bisognerà calcolare la generica espressione del SMST. Questa si ottiene dal rapporto delle produttività marginali.

$$SMST = \frac{PMgx_1}{PMgx_2}$$

Dato che $PMgx_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = 12 * x_2$ e che $PMgx_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = 12 * x_1$

Allora

$$SMST = \frac{PMgx_1}{PMgx_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

La condizione di ottimo implica che $SMST = \frac{p_1}{p_2} = \frac{10}{2} = 5$ da cui si ottiene agevolmente che $\frac{x_2}{x_1}$ = 5 ovvero che $x_2 = 5 * x_1$

Avendo ricavato la relazione tra gli input, possiamo utilizzare la seconda condizione posta dal problema. Il livello di output desiderato deve essere pari a 1000. Dovrà pertanto valere la seguente condizione

$1000 = 12 * x_1 * x_2 = 12 * x_1 * 5 * x_1 = 60 * {x_1}^2$ da cui si ricava che $\sqrt{\frac{1000}{60}} = x_1$ e che quindi $x_1 = 4.08$

Utilizzando la condizione di ottimo $x_2 = 5 * x_1$ possiamo ricavare anche il valore di x_2 che sarà pari a $x_2 = 20.4$

b) Il costo minimo totale sarà dato dai prezzi per le scelte ottimali e sarà pari a

$CT = p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = 10 * 4.08 + 2 * 20.4 = 81.6$

c) E’ possibile disegnare le curve di isocosto esprimendo nell’equazione di costo x_2 in funzione di x_1. In particolare:

$$CT = p_1 * x_1 + p_2 * x_2$$

da cui otteniamo

$$x_2 = \frac{CT}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} * x_1$$

Ovvero

$$x_2 = \frac{81.6}{2} - \frac{10}{2} * x_1$$

Il punto di ottimo corrisponde al punto di tangenza tra l’isoquanto di valori pari a q=1000 e la retta di isocosto di cui sopra.

ALTRA POSSIBILITA’ DI ESERCIZIO: Come si sarebbe dovuto procedere se il testo dell’esercizio non avesse fornito la quantità che l’impresa vuole produrre (q=1000) ma il costo oltre il quale l’impresa non vuole andare? Ad esempio si assuma che tale costo sia C=500, che scriviamo con segno di uguaglianza in quanto produrre meno sarebbe non razionale.

Le condizioni di ottimalità sono le stesse : $\frac{PMgx_1}{PMgx_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p1}{p2} = 5$ ovvero che $x_2 = 5 * x_1$

In questo caso tuttavia occorre sfruttare l’equazione dei costi per determinare i livelli ottimali di x1 e x2.

$C = p1 * x1 + p2 * x2 = p1 * 5 * x1 = 10 * x1 + 10 * x1 = 20 * x1 = 500$ →x1=25

E pertanto x2=125.

Il livello ottimale di produzione sarà q=12*25*125=37500

Anche in questo caso si hanno tutte le informazioni per disegnare il grafico.

Da notare che nel testo base dell’esercizio l’isoquanto è fisso (q=1000) e l’impresa sceglie, tra le infinite rette di isocosto, la retta ottimale tangente all’isoquanto, attraverso le condizioni di ottimalità.

In questo secondo caso invece la retta di isocosto è fissa nel grafico, e l’impresa sceglie l’isoquanto ottimo, tra gli infiniti isoquanti, tangente a tale retta di isocosto.

Rappresentazioni grafiche in aula.

Esercizio 2

a) Data la funzione di utilità $U = logx_1 + logx_2$ si calcoli l’allocazione ottima sapendo che il consumatore dispone di un reddito pari a M=100 e sapendo che il costo degli input è rispettivamente $p_1 = 6;\ p_2 = 2$.

b) Discutere il risultato alla luce della forma della funzione di utilità
c) Ottenere il livello di utilità massima corrispondente all'allocazione ottima
d) Rappresentare graficamente la condizione di ottimo del consumatore

<u>Soluzione</u>

a) L'allocazione ottima è quella in corrispondenza della quale si verifica l'uguaglianza del SMS con il rapporto tra i prezzi dei beni. Pertanto per identificare l'allocazione ottima, bisognerà calcolare la generica espressione del SMS. Questa si ottiene dal rapporto delle utilità marginali.

$$SMS = \frac{MUx_1}{MUx_2}$$

Dato che $MUx_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$ e che $MUx_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$

Allora

$$SMS = \frac{MUx_1}{MUx_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

La condizione di ottimo implica che $SMST = \frac{p_1}{p_2} = \frac{6}{2} = 3$ da cui si ottiene agevolmente che $\frac{x_2}{x_1}$ = 3 ovvero che $x_2 = 3 * x_1$

Avendo ricavato la relazione tra le quantità ottime, possiamo utilizzare il vincolo di bilancio per ottenere i rispettivi livelli.

Dal vincolo di bilancio $M = p_1 * x_1 + p_2 * x_2$ otteniamo

$100 = 6 * x_1 + 2 * 3 * x_1 = 12 * x_1$ da cui si ricava che $\frac{100}{12} = x_1$ e che quindi $x_1 = 8.3$

Utilizzando la condizione di ottimo $x_2 = 3 * x_1$ possiamo ricavare anche il valore di x_2 che sarà pari a $x_2 = 25$

b) La funzione di utilità aumenta nella medesima misura sia per il bene 1 che per il bene 2. Le utilità marginali sono infatti identiche. Questo vuol dire che il consumatore ha preferenze identiche (attribuisce stesso peso al consumo dell'uno o dell'altro bene) per i singoli beni. Ciò rende i prezzi l'unica determinante del suo consumo. Essendo il prezzo del bene 2, tre volte inferiore a quello del bene 1, il consumatore sceglierà di consumare per il bene 2 una quantità pari a tre volte quella del bene 1.
c) L'utilità che il consumatore ottiene dal consumo del suo paniere ottimale è data da

$$U = logx_1 + logx_2 = \log(8.3) + \log(25) = 5.34$$

d) E' possibile disegnare il vincolo di bilancio esprimendo nell'equazione del vincolo x_2 in funzione di x_1. In particolare:

$$M = p_1 * x_1 + p_2 * x_2$$

da cui otteniamo

$$x_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} * x_1$$

Ovvero

$$x_2 = \frac{100}{2} - \frac{6}{2} * x_1$$

Il punto di ottimo corrisponde al punto di tangenza tra la curva di indifferenza di valori pari a 5.34 e il vincolo di bilancio di cui sopra.