Microeconomia - Problem set 4 - soluzione

(Prof. Paolo Giordani - TA: Pierluigi Murro)

2 Maggio 2015

Esercizio 1.

Calcolare i prodotti marginali di ciascun fattore produttivo (PM_1, PM_2) e il saggio marginale di sostituzione tecnica (SMST) per le seguenti funzioni di produzione:

1. $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$
2. $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$
3. $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$
4. $f(x_1, x_2) = ax_1 + b\sqrt{x_2}$
5. $f(x_1, x_2) = x_1^a + x_2^b$

Risposta:

1. $PM_1 = a$, $PM_2 = b$, $SMST = a/b$.
2. $PM_1 = \frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{3/4}$; $PM_2 = \frac{3}{4} x_1^{1/4} x_2^{-1/4}$; $SMST = x_2/3x_1$.
3. $PM_1 = (x_2 + 1)$; $PM_2 = (x_1 + 2)$; $SMST = \frac{(x_2+1)}{(x_1+2)}$.
4. $PM_1 = a$; $PM_2 = \frac{b}{2\sqrt{x_2}}$; $SMST = \frac{2a\sqrt{x_2}}{b}$.
5. $PM_1 = ax_1^{a-1}$, $PM_2 = bx_2^{b-1}$; $SMST = \frac{ax_1^{a-1}}{bx_2^{b-1}}$.

Esercizio 2.

Indicare il tipo di rendimenti di scala (RdS)che caratterizza le seguenti funzioni di produzione:

1. $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
2. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 2x_2}$
3. $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3$
4. $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 3x_2\}$
5. $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 0.5x_2\}^2$
6. $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}^{1/4}$

Risposta:

1. Costanti (s=1)
2. Decrescenti (s<1)
3. Crescenti (s>1)
4. Costanti (s=1)
5. Crescenti (s>1)
6. Decrescenti (s<1)

Esercizio 3.

Si consideri la seguente funzione di produzione: $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. Supponiamo che il costo dei fattori produttivi sia: $w_1 = 5; w_2 = 2$.

1. Scrivere l'equazione della curva di isoquanto per il seguente livello di output: $y = 1600$. Rappresentare graficamente la curva di isoquanto.
2. Che tipo di rendimenti di scala caratterizza la funzione di produzione?
3. Vale la legge dei prodotti marginali decrescenti?
4. Scrivere l'equazione della curva di isocosto per i seguenti livelli di spesa: $C_1 = 80; C_2 = 100; C_2 = 200$. Rappresentare graficamente le curve di isocosto.
5. Calcolare la scelta ottima qualora l'impresa decida di produrre $y = 1600$. Calcolare il costo totale.

6. Determinare la scelta ottima in funzione di un generico y. Calcolare il costo totale, il costo marginale e il costo medio in funzione di y e commentare i risultati ottenuti.

7. Supponiamo che nel breve periodo $x_1^{fix} = 2$. Determinare la quantità di x_2 impiegata per produrre $y = 1600$. Calcolare il costo totale di breve periodo. Che differenza emerge rispetto alla scelta ottima individuata al punto 5?

8. Determinare la scelta di x_2 nel breve periodo ($x_1^{fix} = 2$) per un generico y. Calcolare il costo totale, il costo marginale e il costo medio di breve periodo in funzione di y. Confronta i risultati con quelli ottenuti al punto 6.

Risposta:

1. La curva di isoquanto per $y = 1600$ è descritta dalla seguente equazione:

$$x_2 = \frac{40}{x_1}.$$

La pendenza (in valore assoluto) della curva di isoquanto è data dal saggio marginale tecnico di sostituzione (SMST):

$$SMST = \frac{PM_1}{PM_2} = \frac{\delta f(x_1,x_2)/\delta x_1}{\delta f(x_1,x_2)/\delta x_2} = \frac{2x_1x_2^2}{2x_1^2x_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Per rappresentare graficamente tale curva, è sufficiente calcolare i seguenti punti: se $x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 40$; se $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 40$. Congiungendo i punti (1,40) e (40,1) si ottiene la curva di isoquanto.
Nota: Non è possibile calcolare l'intercetta verticale e l'intercetta orizzontale perché il processo produttivo richiede quantità positive di entrambi i fattori produttivi.

2. Crescenti ($a + b = 4 > 1$).

3. Non vale la legge dei prodotti marginali decrescenti. Essendo entrambi i coefficienti maggiori di uno, il prodotto marginale di ciascun fattore produttivo è crescente. Possiamo verificare tale risultato nel seguente modo:

$$PM_1 = 2x_1x_2^2 > 0. \ \frac{\delta PM_1}{\delta x_1} = 2x_2^2 > 0$$
$$PM_2 = 2x_1^2x_2 > 0. \ \frac{\delta PM_2}{\delta x_2} = 2x_1^2 > 0$$

La derivata prima del prodotto marginale è positiva in entrambi i casi e di conseguenza il PM è crescente per entrambi i fattori produttivi.

4. In termini generali, il costo totale è dato dalle seguente relazione lineare:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = C$$

Esplicitando per x_2 otteniamo l'equazione della curva di isocosto:

$$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2}x_1$$

dove $x_2 = \frac{C}{w_2}$ denota l'intercetta verticale ($x_1 = 0$) mentre la pendenza è data da $-\frac{w_1}{w_2}$. L'intercetta orizzontale ($x_2 = 0$) è $x_1 = \frac{C}{w_1}$.

- Per $C_1 = 80$ l'equazione di costo è:

  $$x_2 = 40 - \frac{5}{2}x_1$$

  L'intercetta orizzontale è $x_1 = 16$. L'intercetta verticale è $x_2 = 40$. La pendenza è $-\frac{5}{2}$.

- Per $C_2 = 100$ l'equazione di costo è:

  $$x_2 = 50 - \frac{5}{2}x_1$$

  L'intercetta orizzontale è $x_1 = 20$. L'intercetta verticale è $x_2 = 50$. La pendenza è $-\frac{5}{2}$.

- Per $C_3 = 200$ l'equazione di costo è:

  $$x_2 = 100 - \frac{5}{2}x_1$$

  L'intercetta orizzontale è $x_1 = 40$. L'intercetta verticale è $x_2 = 100$. La pendenza è $-\frac{5}{2}$.

Nota: all'aumentare del costo, la retta trasla parallelamente verso l'alto (la pendenza rimane costante, poiché dipende dal prezzo dei fattori produttivi).

5. Essendo la funzione di produzione del tipo Cobb-Douglas (regolare), il problema di scelta ottima può essere risolto nel seguente modo:

$$\begin{cases} SMST = w_1/w_2 \\ f(x_1, x_2) = y^T \end{cases}$$

In questo caso diventa:

$$\begin{cases} x_2/x_1 = 5/2 \\ x_1^2 x_2^2 = 1600 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5}{2}x_1 \\ x_1^2(\frac{5}{2}x_1)^2 = 1600 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5}{2}x_1 \\ \frac{25}{4}x_1^4 = 1600 \end{cases}$$

Quindi: $x_1^* = 4$ e $x_2^* = 10$. Il costo totale minimo di lungo periodo è $CT^{lp} = w_1x_1^* + w_2x_2^* = 5 * 4 + 2 * 10 = 40$.

6. La domanda dei fattori produttivi per un generico valore di y si ottiene in modo analogo:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2}x_1 \\ \frac{25}{4}x_1^4 = y \end{cases}$$

Quindi: $x_1(y) = \sqrt[4]{\frac{4y}{25}}$ e $x_2(y) = \frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{4y}{25}}$.

Il costo totale minimo di lungo periodo in funzione di y è:
$CT(y) = w_1x_1(y) + w_2x_2(y) = 5 * \sqrt[4]{\frac{4y}{25}} + 2 * \frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{4y}{25}} = 10\sqrt[4]{\frac{4y}{25}} = 10(\frac{4}{25})^{1/4}y^{1/4}$.

Per semplicità poniamo $a = 10(\frac{4}{25})^{1/4}$. Il costo totale è $ay^{1/4}$. La funzione di costo è quindi concava ($1/4 < 1$). Tale risultato è coerente con il fatto che la funzione di produzione mostra rendimenti di scala crescenti. In altri termini, il costo totale cresce a tassi decrescenti all'aumentare del livello di produzione desiderato. Ci aspettiamo quindi che sia la funzione di costo marginale che di costo medio siano decrescenti rispetto a y:

$$MC(y) = \frac{dCT(y)}{dy} = a\frac{1}{4}y^{-3/4} = \frac{a}{4\sqrt[4]{y^3}}$$

$$AC(y) = \frac{CT(y)}{y} = \frac{ay^{1/4}}{y} = \frac{a}{\sqrt[4]{y^3}}.$$

Sia il costo marginale che il costo medio diminuiscono all'aumentare di y.

7. Nel breve periodo, l'impresa non sceglie in maniera ottimale come nel lungo periodo: la quantità di x_2 necessaria per realizzare $y = 1600$ quando $x_1^{fix} = 2$ si ottiene sostituendo tali valori nella funzione di produzione:

$$f(2, x_2) = 2^2x_2^2 = 1600 \rightarrow x_2^{bp} = 20.$$

Il costo totale di breve periodo è:

$$CT^{bp} = w_1 x_1^{fix} + w_2 x_2^{bp} = 5 * 2 + 2 * 20 = 50.$$

Il costo totale di breve periodo è maggiore di quello di lungo periodo, perché in questo caso la combinazione dei fattori produttivi necessaria per realizzare $y = 1600$ non è stata individuata risolvendo un problema di scelta ottima.

8. La domanda di x_2^{bp} in funzione di y è uguale a:

$$f(2, x_2) = 2^2 x_2^2 = y \rightarrow x_2^{bp}(y) = \frac{\sqrt{y}}{2}.$$

Il costo totale di breve periodo in funzione di y è dato da:

$$CT^{bp}(y) = w_1 x_1^{fix} + w_2 x_2^{bp}(y) = 5 * 2 + 2\frac{\sqrt{y}}{2} * = 10 + y^{1/2}.$$

Dove 10 rappresenta il costo fisso, mentre $y^{1/2}$ il costo variabile. Dato che il fattore produttivo variabile (x_2) mostra rendimenti crescenti ($b > 0$), anche nel breve periodo la funzione di costo totale è concava e giace sopra la funzione di costo totale di lungo periodo (l'unico punto in comune coincide con la quantità ottima dei fattori produttivi).

$$MC^{bp}(y) = \frac{dCT^{bp}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$AC^{bp}(y) = \frac{10}{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Sia il costo marginale che il costo medio di breve periodo diminuiscono all'aumentare di y.

Esercizio 4.

Si consideri la seguente funzione di produzione: $f(x_1, x_2) = (4x_1 + 2x_2)^2$.
Il costo dei fattori produttivi è: $w_1 = 2; w_2 = 5$. Supponiamo che l'impresa decida di produrre $y = 40000$. Calcolare la scelta ottima ed il costo ad essa associato. *Nota:* Il SMST va calcolato prendendo in considerazione la funzione di base. La funzione con la trasformazione monotona va invece presa in considerazione quando bisogna calcolare la quantità ottimale.

Risposta:
La funzione di produzione è caratterizzata da fattori produttivi perfetti sostituti. Per individuare la scelta ottimale, il primo passo consiste nel confrontare il SMST (pendenza dell'isoquanto, il quale rappresenta il vincolo tecnologico) con il rapporto tra i prezzi dei fattori (pendenza della funzione di costo da minimizzare). Per calcolare il SMST è sufficiente prendere in considerazione la funzione di produzione senza la trasformazione monotona: $f(x_1, x_2) = (4x_1 + 2x_2)$. Il SMST è il rapporto tra i prodotti marginali di ciascun input:

$$SMST = \frac{PM_1}{PM_2} = 4/2.$$

Essendo $SMST > w_1/w_2$ $(4/2 > 2/5)$, l'impresa utilizza soltanto il fattore produttivo x_1. Sostituiamo $x_2^* = 0$ nella funzione di produzione con la trasformazione monotona:

$$f(x_1, 0) = (4x_1 + 0)^2 = 40000 \rightarrow x_1^* = 50.$$

Il costo totale è : $CT = w_1 * x_1^* = 2 * 50 = 100$.

Esercizio 5.

Si consideri la seguente funzione di produzione $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 0.5x_2\}$.

1. Determinare la quantità ottimale dei fattori impiegata per produrre $y = 4$.
2. Determinare la scelta ottima dei fattori per un generico y e calcolare il costo totale ad essa associata in funzione dei prezzi dei fattori produttivi w_1, w_2.
3. Se $x_1 = 1$, qual è la minima quantità x_2 necessaria per produrre $f(x_1, x_2) = 1$?

Risposta:

1. La funzione di produzione è caratterizzata da fattori produttivi perfetti complementi. Il punto di ottimo è quindi dato da:

   $x_1 = 0.5x_2$

   Per individuare la quantità ottimale per produrre $y = 4$ è sufficiente eguagliare uno dei due input al livello di produzione desiderato:

   $0.5x_2 = 4 \rightarrow x_2^* = 8$.

   Quindi: $x_1 = 0.5x_2^* = 0.5 * 8 = 4$.

2. Per un generico y, si ha:

   $0.5x_2 = y \to x_2(y) = 2y$.

   Quindi: $x_1 = 0.5x_2(y) = 0.5 * 2y = y$.
   Il costo totale è: $CT(w_1, w_2, y) = w_1 * y + w_2 * 2y = (w_1 + 2w_2)y$.

3. Supponiamo che nel breve periodo $x_1 = 1$. La minima quantità x_2 per produrre $y = 1$ si trova nel seguente modo:

   $f(x_1, x_2) = \min\{1, 0.5x_2\} = 1$

   $x_1 = 0.5x_2 \to 1 = 0.5x_2 \to x_2 = 2$.

Esercizio 6.

Rispondere vero o falso.

1. La curva di isoquanto rappresenta una tecnica di produzione per realizzare un certo livello di output.
   Risposta: Falso. Rappresenta tutte le tecniche (ovvero combinazioni di fattori produttivi) per realizzare un certo livello di output.

2. La curva di isocosto è sempre rappresentata da una retta.
   Rispsta: Vero. Essa rappresenta una relazione lineare nei fattori produttivi.

3. Se la funzione di produzione del tipo Cobb-Douglas mostra RdS costanti, allora il prodotto marginale di ciascun fattore produttivo è decrescente.
   Risposta: Vero. In presenza di rendimenti di scala costanti si ha che $a + b = 1$, per cui necessariamente entrambi i coefficienti sono minori di uno ($a, b < 1$). Dal punto di vista economico, ciò implica che il prodotto marginale di ciascun input è decrescente.

4. Se la funzione di produzione del tipo Cobb-Douglas mostra RdS crescenti, allora il prodotto marginale di ciascun fattore produttivo è sempre crescente.
   Risposta: Falso. Si può verificare una situazione in cui la somma dei coefficienti è maggiore di uno, ma entrambi siano minori di uno (es.$a = 0.8$ e $b = 0.9$). In questo caso la funzione di produzione mostra RdS crescenti ($a + b = 0.8 + 0.9 = 1.7$), ma entrambi i fattori produttivi sono caratterizzati da prodotto marginale decrescente.

5. Se i RdS sono crescenti, i costi medi di lungo periodo sono una funzione decrescente rispetto all'output.
   Risposta: Vero. La funzione di costo di lungo periodo è infatti concava.

6. Se i RdS sono costanti, il costo totale di breve periodo coincide con il costo totale di lungo periodo.

Risposta: Falso. In questo caso la funzione di costo di lungo periodo è lineare mentre la funzione di costo di breve periodo è convessa e giace al di sopra (l'unico punto in comune coincide con la scelta ottima dei fattori produttivi).

7. Se i RdS sono decrescenti, anche il costo totale di lungo periodo c̀resce a tassi decrescenti rispetto all'output.
   Risposta: Falso. Il costo totale cresce a tassi crescenti (funzione di costo convessa).

8. Se la funzione di costo totale di lungo periodo è convessa, allora i costi marginali sono una funzione decrescente rispetto all'output.
   Risposta: Falso. La funzione di costo è convessa in presenza di rendimenti di scala decrescenti. Il costo marginale è quindi crescente rispetto all'output.